HARLA

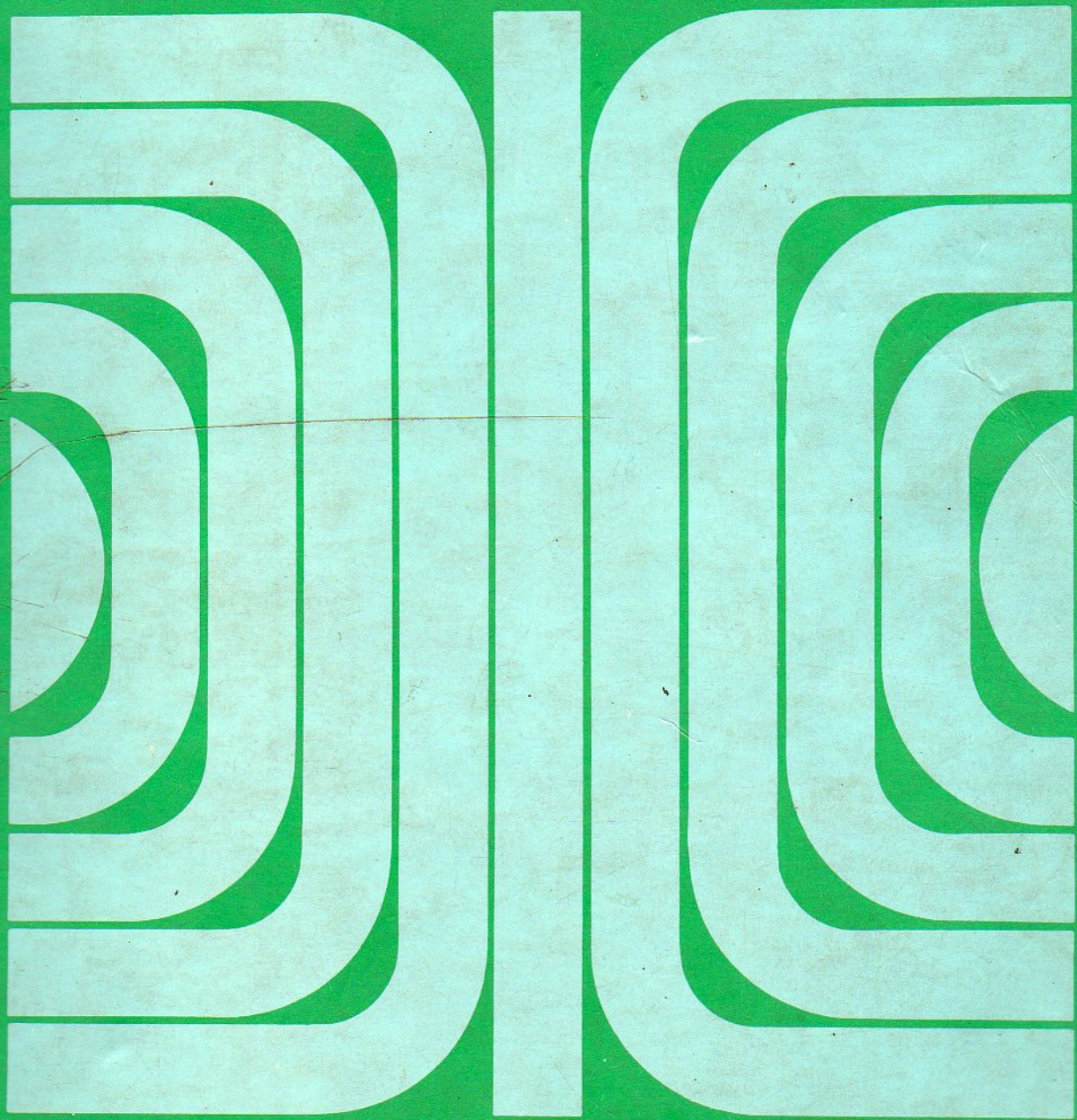
física II

conceptos fundamentales
y su aplicación

Teoria 428 problemas resueltos
81 ejercicios propuestos

EDICION REVISADA

ALVARO PINZON



colección harper

4370

física II

conceptos fundamentales
y su aplicacion

M. Zurita B.

colección harper

física II

conceptos fundamentales y su aplicación

Edición revisada

teoría

428 problemas resueltos

81 ejercicios propuestos

ALVARO PINZON ESCAMILLA
Matemático de la Universidad Nacional de Colombia,
Miembro de la Mathematical Society of America
y de la Mathematical Association of America

REVISION TECNICA
Dr. Armando Villamizar
Lic. Matemáticas y Física
Universidad Pedagógica Nacional,
Bogotá - Colombia

HARLA, S. A. DE C.V.
HARLA Harper & Row Latinoamericana
México, Buenos Aires, Bogotá, São Paulo

Director del Programa Editorial: *Francisco Gutiérrez Flores*
Director Adjunto: *Jaime Arvizu Lara*
Editor Académico: *Jesús Villamizar Herrera*

Colaboradores en preparación: *Mireya Munévar Forero*
Alfonso Gutiérrez Rojas

FISICA II. CONCEPTOS FUNDAMENTALES Y SU APLICACION
Edición revisada

Alvaro Pinzón Escamilla

Copyright © 1973, 1977 por HARLA, S.A. de C. V., Antonio Caso 142, México 4, D. F. Tel. 566-4589. Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, registro No. 723. Reservados todos los derechos. Queda terminantemente prohibido reproducir este libro, por cualquier medio, total o parcialmente, sin permiso expreso de los editores. Es propiedad.

Coordinación y preparación: EDITORIAL TEC-CIEN

Impreso en México — Printed in México

Contenido

PROLOGO 7

CAPITULO 1. **Electrostática** 9

Ley de Coulomb. Valor de ε_0 9
Unidad de carga eléctrica 10

CAPITULO 2. **Campo eléctrico** 18

Teorema de Gauss (Aplicaciones) 19
Dipolo 20

CAPITULO 3. **Potencial eléctrico** 34

Energía potencial eléctrica. Potencial. Unidad de potencial 34
Diferencia de potencial. Relación entre potencial y campo 35
Potencial producido por una distribución de cargas 35

CAPITULO 4. **Capacitores** 53

Capacitancia. Capacitor. Capacitor plano 53
Capacitancia de una esfera conductora. Capacitor esférico 54
Capacitor cilíndrico 55
Asociación de capacitores 56

CAPITULO 5. **Corriente eléctrica** 72

Intensidad de corriente. Densidad de corriente. Ley de Ohm 72
Variación de la resistencia con la temperatura. Asociación de resistencias. 73
Ley de Joule. Potencia 74
Fuerza electromotriz. Ley de Ohm para un circuito cerrado 74
Ley de Ohm para un circuito abierto. Leyes de Kirchhoff 75

CAPITULO 6. **Electroquímica** 102

Leyes de Faraday. Equivalente electroquímico 102

CAPITULO 7. **Electromagnetismo. Propiedades magnéticas de la materia** 106

Introducción 106
Fuerza que el campo magnético ejerce sobre una carga móvil; unidad de campo 106
Acción del campo sobre una corriente eléctrica 107
Acción del campo magnético sobre un circuito plano. Solenoides 108
Imanes: Equivalencia entre imanes y solenoides. Flujo magnético 111
Campo magnético creado por una carga eléctrica móvil 112
Campos magnéticos producidos por las corrientes 114
Teorema de la circulación. Campo en el interior de un solenoide 116
Acciones mutuas entre corrientes paralelas 117

M. Zurita B.

CAPITULO 8. Inducción electromagnética 127

Corrientes de Focault 128

CAPITULO 9. Corrientes alternas 144

Ley de Ohm. Valores eficaces. Resonancia 145

CAPITULO 10. Instrumentos de medida 158

Galvanómetro. Amperímetro. Voltímetro 158
Puente de Wheatstone 159

CAPITULO 11. Campo magnético y corriente eléctrica 169

Fuerza ejercida por un campo magnético sobre un conductor por el que circula una corriente de intensidad I 172
Fuerza entre dos conductores rectilíneos y paralelos 173

CAPITULO 12. Ondas electromagnéticas 183

Ondas longitudinales y transversales. Ondas electromagnéticas planas 183
Energía del campo magnético. Vector de Poynting 184

CAPITULO 13. Naturaleza de la luz 188

Teorías. Propagación de la luz. Flujo luminoso. Iluminación 188
Iluminancia 189

CAPITULO 14. Refracción y reflexión 196

Optica geométrica. Leyes de la refracción. Dioptrio plano. Lámina de caras paralelas. Prisma óptico 196
Dioptrio esférico. Leyes de la reflexión 197
Espejo plano. Espejos esféricos 198

CAPITULO 15. Lentes 226

Lentes esféricas. Leyes de las lentes 226
Instrumentos ópticos. Signos convencionales 227

CAPITULO 16. Polarización de la luz 249

Polarización. Polarización por reflexión 249
Giro del plano de polarización 250

CAPITULO 17. Interferencias 254

Experimento de Young 254
Difracción. Red de difracción 255

CAPITULO 18. Relatividad 269

Transformaciones de Lorentz 269
Contracción de Lorentz-Fitzgerald 270
Dilatación del tiempo. Masa relativista. Masa y energía 271
Radiactividad 275
Atomo de Bohr 280
BIBLIOGRAFIA 286
INDICE 287

Prólogo

Integrada en dos tomos, la obra FISICA —*Conceptos fundamentales y su aplicación*— presenta al estudiante de física general un conjunto variado y selecto de problemas resueltos en detalle. Ofrece también un grupo menor de ejercicios propuestos para resolver y un resumen teórico, incorporado al principio de cada capítulo, que recuerda las leyes y fórmulas fundamentales necesarias para resolver los problemas en él incluidos.

La experiencia diaria nos enseña que lo que oímos lo olvidamos con relativa facilidad. Otro tanto, aunque en menor medida, nos ocurre con lo que vemos. Lo que siempre comprendemos mejor y, a la larga, retenemos mejor es lo que hacemos por nosotros mismos, aquello en lo que nos ocupamos con concentración.

La metodología de la enseñanza apunta hoy en el mismo sentido: Es preciso poner en manos del estudiante el material suficiente —en este caso, problemas y cuestiones— como medio de que sea éste quien por sí mismo pueda reconocer las manifestaciones de cada concepto en los hechos cuyo estudio se le propone. En este terreno se han situado las ambiciones de esta obra, cuyo conjunto tiende hacia los principios fundamentales a través de sus aplicaciones prácticas, en el convencimiento de que son éstas las que, en definitiva, rinden la total perspectiva de aquéllos.

Esta elección imprime a la obra el carácter complementario de un libro de problemas. Pero, en compensación, los conceptos e ideas que en él aprende el estudiante pasarán a formar parte de la base sobre la que habrá de realizarse su educación superior, no solo en el ámbito de la física como tal disciplina, sino en su formación científica integral, ya que la física, en el conjunto de sus leyes, subyace a todas las demás ciencias.

Dentro del ámbito estudiantil al que se dirige la obra, se ha procurado no rebasar el nivel matemático que razonablemente puede exigirse al estudiante que procede de los actuales planteles de enseñanza media y comienza a construir los fundamentos de la enseñanza superior o universitaria. También se ha cuidado de que, desde el principio al fin, caracterice al libro una bien integrada y lógica progresión en el orden de sus temas, cuestiones y problemas.

Se recomienda al estudiante que, antes de leer la solución de un problema, intente primero resolverlo por su cuenta y después compare la solución que obtenga con la del libro. En algunos problemas se han omitido ciertos detalles en el desarrollo de la solución con el fin de dar oportunidad al estudiante de intervenir con sus propios recursos en el proceso.

Esperamos que esta obra contribuya a aliviar la falta de textos de aplicación práctica —tan útiles para que el estudiante pueda superar las deficiencias de las clases masivas—, y confiamos que el nivel docente de la misma esté en consonancia con el entusiasmo que autor y editores han puesto en su realización.

El autor desea finalmente expresar su agradecimiento al licenciado en Ciencias Físicas profesor José Joaquín Rovira por la revisión crítica de ciertas partes de la obra y por sus valiosas sugerencias.

A. PINZON E.

CAPITULO 1

Electrostática

Ley de Coulomb. La fuerza **F** existente entre dos cargas puntuales eléctricas q y q' es directamente proporcional al producto de sus valores absolutos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia **r** que las separa:

$$\mathbf{F}_{1\text{-}2} = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \boldsymbol{\mu}_{1\text{-}2} \qquad F_{1\text{-}2} = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \qquad (1\text{-}1)$$

r es el vector unitario en la dirección y sentido del vector **r** que une las cargas y k es el coeficiente de proporcionalidad cuyo valor depende de las unidades en que se expresen las magnitudes que intervienen en la relación. En el sistema M.K.S. el valor de k es:

$$k_0 \simeq 9 \cdot 10^9 \ \mathrm{N} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2}$$

quedando introducida una nueva unidad, la de carga eléctrica, llamada culombio (C), que completa el sistema. (Vea *Unidad de carga eléctrica.*)

Haciendo $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}$ se introducen en el cálculo el factor de racionalización $\dfrac{1}{4\pi}$ y ε, constante dieléctrica, característica del medio en que se encuentran las dos cargas también llamada *permitividad del medio.*

En el vacío o en el aire*, la constante dieléctrica se representa por ε_0.

Cuando existe materia entre las cargas, el valor de la fuerza **F** queda modificado por la inducción de las moléculas del medio, acostumbrándose a expresar ε en función de ε_0:

$$\varepsilon = K\varepsilon_0 \qquad K > 1$$

El cociente $\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = K$ es la constante dieléctrica relativa y representa la *capacidad inductiva específica del medio.*

Valor de ε_0.

a) En el sistema de unidades electrostáticas se toma el valor arbitrario $k = 1$, del cual se obtienen para ε:

$$\text{racionalizado, } \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$$

$$\text{sin racionalizar, } \varepsilon_0 = 1$$

* El valor de ε' en el aire sufre una alteración despreciable respecto al correspondiente al vacío.

b) En el sistema M.K.S.C.: $k_0 = 8{,}98755 \times 10^9\ \mathrm{N\,m^2/C^2}$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot k_0} = 8{,}8541 \times 10^{-12}\ \frac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{N \cdot m^2}}$$

valores que se obtienen de (1-1) al despejar ε_0.

Si $k_0 \approx 9 \times 10^9\ \mathrm{N\,m^2/C^2}$ $\Rightarrow \varepsilon_0 \approx 8{,}842 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\,m^2}$

Las dimensiones de ε son:

$$[\varepsilon] = \frac{[Q^2]}{[F \cdot L^2]} = M^{-1} \cdot L^{-3} \cdot T^2 \cdot Q^2$$

Unidad de carga eléctrica. La *unidad convencional* de carga eléctrica en el sistema de unidades electrostáticas (u.e.e.) llamada también *franklin* se obtiene igualmente a partir de (1-1) y, en consecuencia, puede definirse como aquella que, colocada frente a otra igual, situada a un centímetro en el vacío sufre una fuerza repulsiva de una dina. También se llama statcoulombio.

En el sistema M.K.S.C. la unidad de carga es el culombio (C), que puede obtenerse y definirse paralelamente a la anterior, pero que con más propiedad se halla ligada a la unidad de intensidad ampere, establecida por fenómenos electrolíticos y electromagnéticos.

Los submúltiplos más usuales del culombio son:

1 statculombio = 1 statC = $3{,}3356 \times 10^{-10}$ C $\approx \frac{1}{3} \times 10^{-9}$ C

1 microculombio = 1 μC = 10^{-6} C

1 nanoculombio = 1 ηC = 10^{-9} C

1 picoculombio = 1 ρC = 10^{-12} C

La *unidad natural* de carga eléctrica es la transportada por un electrón ($-e$) o por un protón ($+e$), cuyo valor experimental aproximado es:

$$e = 1{,}60207 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

con lo cual el culombio representa la carga transportada por $6 \cdot 10^{18}\ e$:

$$\mathrm{C} = 6 \cdot 10^{18}\ e$$

Cuando existen n cargas que actúan sobre la carga A:

$$\vec{F}_{R_A} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i\text{-}A} = \vec{F}_{1\text{-}A} + \vec{F}_{2\text{-}A} + \vec{F}_{3\text{-}A} + \dots \vec{F}_{n\text{-}A}$$

La fuerza de atracción gravitatoria entre dos masas es:

$$\vec{F}_{1\text{-}2} = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\frac{\vec{r}_{1\text{-}2}}{|r|}$$

$G = 6{,}672 \times 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{Kg^2}}$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1-1 Dos cargas de 5 microculombios están separadas 0,5 metros en el aire. ¿Cuál es la fuerza de repulsión entre ellas?

Solución. $F = k\,\frac{Q_1 Q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C} \cdot 5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}}{(0{,}5\ \mathrm{m})^2} = 0{,}9\ \mathrm{N}.$

Problema 1-2 Dos bolas de saúco están suspendidas la una encima de la otra y separadas por una distancia de 0,5 metros. La inferior tiene una carga de 2 picoculombios y una masa de $2{,}5 \cdot 10^{-4}$ kilogramos. ¿Cuál debe ser la carga de la bola superior para que eleve la bola inferior?

Solución. Según la ley de Coulomb, $Q_1 = \frac{Fr^2}{Q_2 k}$. Según la segunda ley de Newton, $F = ma$. Combinando estas dos fórmulas se obtiene:

$$Q_1 = \frac{mar^2}{Q_2 k} = \frac{(2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}8\ \mathrm{m/seg^2})(25 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^2})}{(2 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C})(9 \cdot 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})} = 340 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{C}$$

Debe ser una carga negativa para que atraiga la otra carga que es positiva.

Problema 1-3 Tres cargas positivas de 50 microculombios se colocan como lo indica la Figura 1-1. ¿Qué fuerza ejercen las dos primeras cargas sobre la tercera? ¿Cuál es la fuerza que ejercen las cargas situadas en los extremos sobre la carga de la mitad?

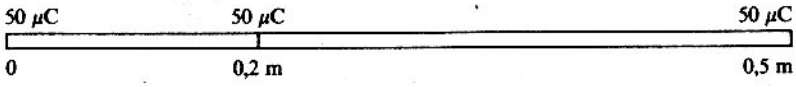


Figura 1-1

Solución. La carga en la posición 0 ejerce una fuerza de repulsión sobre la carga situada a 0,5 m por ser positiva. La fuerza está dada por:

$$F = k\frac{Q_1Q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \cdot \frac{50 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot 50 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{(0{,}5 \text{ m})^2} = 90 \text{ N}$$

De la misma manera, la carga situada a 0,2 m ejerce una fuerza de repulsión sobre la carga situada a 0,5 m, que está dada por:

$$F = k\frac{Q_1Q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \cdot \frac{50 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot 50 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{(0{,}3 \text{ m})^2} = 250 \text{ N}$$

La fuerza total ejercida sobre la carga situada a 0,5 m es 90 N + 250 N = 340 N.

Para calcular la fuerza ejercida sobre la carga del centro por la carga que está en 0 se tiene que:

$$F = k\frac{Q_1Q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \cdot \frac{50 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot 50 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{(0{,}2 \text{ m})^2} = 563 \text{ N}$$

Es decir, la carga situada en 0 ejerce una fuerza repulsiva de 563 N sobre la carga situada en 0,20 m, hacia la derecha. Sobre la carga de la mitad actúan dos fuerzas, una hacia la derecha, de 563 N, y otra hacia la izquierda, de 250 N; entonces la fuerza neta que actúa sobre la carga de la mitad es de 313 N hacia la derecha.

Problema 1-4 Tres cargas de +3, −3 y +5 microculombios, respectivamente, se colocan en los vértices de un triángulo equilátero *ABC* de 0,5 metros de lado. ¿Cuál es la magnitud y dirección de la fuerza resultante que actúa sobre la carga de +5 microculombios?

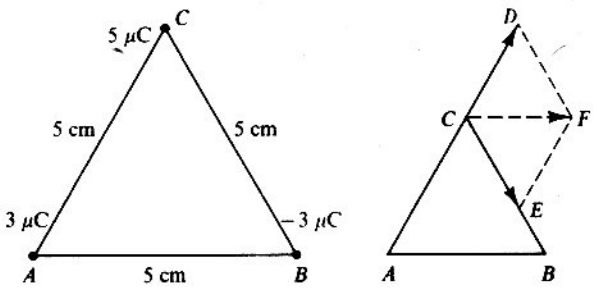


Figura 1-2

Solución. La fuerza de repulsión entre las cargas de +3 y +5 μC está dada por:

$$F = k\frac{Q_1Q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \frac{(3 \cdot 10^{-6} \text{ C})(5 \cdot 10^{-6} \text{ C})}{(0{,}5 \text{ m})^2} = 0{,}54 \text{ N}$$

La fuerza de atracción entre las cargas de −3 y +5 μC es de 0,54 N porque son de signos opuestos y la distancia es la misma.

La carga de $+3\ \mu C$ en A ejerce una fuerza de 0,54 N sobre la carga en C a lo largo de CD.

La carga de $-3\ \mu C$ en B ejerce una fuerza de 0,54 N sobre la carga situada en C a lo largo de CE.

Para hallar la resultante de estas fuerzas se completa el paralelogramo de fuerzas, el cual da una resultante que actúa según CF.

El triángulo CEF es equilátero porque es semejante al triángulo ABC, puesto que los lados de los dos triángulos son paralelos. Por ser CEF un triángulo equilátero, la fuerza resultante CF es de 0,54 N en la dirección indicada.

Problema 1-5 Dos objetos pequeños están cargados con $+4 \cdot 10^{-6}$ y $-16 \cdot 10^{-6}$ culombios, respectivamente. ¿Cuál es la fuerza de atracción entre ellos si están separados 0,1 metros en el aire? Si los objetos se ponen en contacto y después se separan a sus posiciones originales, ¿cuál es la fuerza que actúa entre ellos?

Solución. La fuerza de atracción entre los objetos está dada por:

$$F = k\frac{Q_1Q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot 16 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{(0{,}1\ \text{m})^2} = 57{,}6\ \text{N}$$

Si los objetos se ponen en contacto, la carga resultante es $-12 \cdot 10^{-6}\ \text{C} = (+4 \cdot 10^{-6}\ \text{C}) + (-16 \cdot 10^{-6}\ \text{C})$ con una carga neta de $-6 \cdot 10^{-6}$ C sobre cada uno de ellos. Entonces la fuerza de repulsión que actúa entre ellos es de:

$$F = k\frac{Q_1Q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \cdot \frac{6 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot 6 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{(0{,}1\ \text{m})^2} = 32{,}4\ \text{N}$$

Problema 1-6 La masa de un electrón es de $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kilogramos y su carga $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ culombios. Suponga que dos electrones se colocan cercanos el uno del otro. Compare las fuerzas eléctricas y gravitacionales que actúan sobre ellos.

Solución. Si r es la distancia que los separa, la fuerza de atracción gravitacional entre ellos es:

$$F_g = G\frac{m^2}{r^2} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 9{,}1^2 \cdot 10^{-62}\ \text{kg}^2}{r^2} = \frac{54{,}6 \cdot 10^{-72}}{r^2}\ \text{N}$$

La fuerza de repulsión eléctrica entre los electrones es:

$$F_e = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{9 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2} \cdot 1{,}6^2 \cdot 10^{-38}\ \text{C}^2}{r^2} = \frac{23{,}04 \cdot 10^{-29}}{r^2}\ \text{N}$$

Entonces al hacer el cociente se encuentra que:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{23{,}04 \cdot 10^{-29}}{54{,}6 \cdot 10^{-72}} = 4{,}2 \cdot 10^{42}$$

Esto muestra que la fuerza gravitacional entre los electrones es despreciable en comparación con la fuerza eléctrica.

Problema 1-7 Dos esferas pequeñas que pesan 3 dinas cada una están sujetas por hilos de seda de 5 centímetros de longitud y cuelgan de un punto común. Cuando se suministra a las esferas una cantidad igual de carga negativa cada hilo forma un ángulo de 30° con la vertical. ¿Cuál es el valor de las cargas?

Solución. $Q = Q'$ y $K = 1$. Entonces $F = K\frac{QQ'}{r^2}$, de donde resulta que $Q = r\sqrt{F}$.

Según la Figura 1-3, $r_1 = d \operatorname{sen} \theta = 5 \operatorname{sen} 30° = 2{,}5$ cm y la distancia $r = 2r_1 = 5$ cm. La fuerza repulsiva F es la componente de P según la dirección de r, es decir, que $F = P \operatorname{tg} \theta = 3 \operatorname{tg} 30° = 173$ dinas. Entonces el valor de la fuerza resultante es:

$$Q = r\sqrt{F} = 5\sqrt{1{,}73} = 5 \cdot 1{,}315 \text{ u.e.e.} = 6{,}57/(3 \cdot 10^9)\text{C} = 2{,}2 \cdot 10^{-9}\text{ C}$$

porque $1\text{ C} = 3 \cdot 10^9$ u.e.e.

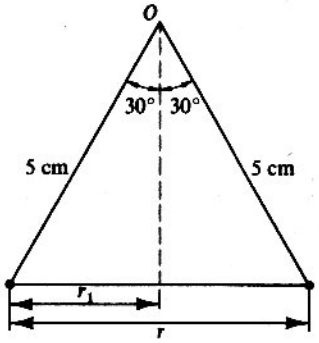


Figura 1-3

Problema 1-8 Se colocan tres cargas en los vértices de un triángulo como lo muestra la Figura 1-4. Halle la magnitud y dirección de la fuerza resultante que actúa sobre la carga de $+25 \cdot 10^{-9}$ culombios.

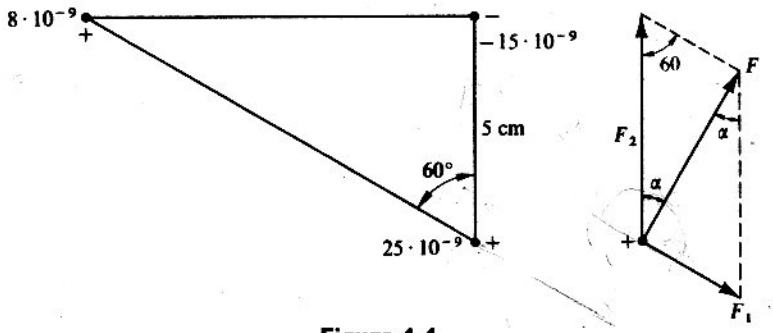


Figura 1-4

Solución. I. La fuerza de repulsión que ejerce sobre la carga de $25 \cdot 10^{-9}$ C la carga de $+8 \cdot 10^{-9}$ C es:

$$F_1 = 9 \cdot 10^9 \frac{8 \cdot 10^{-9} \cdot 25 \cdot 10^{-9}}{(0{,}1)^2} = 18 \cdot 10^{-5}\text{ N (repulsión)}$$

La fuerza de atracción es:

$$F_2 = 9 \cdot 10^9 \frac{15 \cdot 10^{-9} \cdot 25 \cdot 10^{-9}}{0{,}05^2} = 135 \cdot 10^{-5}\text{ N (atracción)}$$

La fuerza neta que actúa sobre la carga de $25 \cdot 10^{-9}$ C es la suma vectorial de las fuerzas F_1 y F_2. Según la del coseno.

$$F^2 = (18 \cdot 10^{-5})^2 + (135 \cdot 10^{-5})^2 - 2 \cdot 18 \cdot 10^{-5} \cdot 135 \cdot 10^{-5} \cos 60° \quad \therefore F = 127 \cdot 10^{-5}\text{ N}$$

El ángulo que esta fuerza resultante forma con el eje Y está dado por:

$$\frac{18 \cdot 10^{-5}}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{127 \cdot 10^{-5}}{\operatorname{sen} 60°} \quad \therefore \operatorname{sen} \alpha = 0{,}123 \quad \therefore \alpha = 7°$$

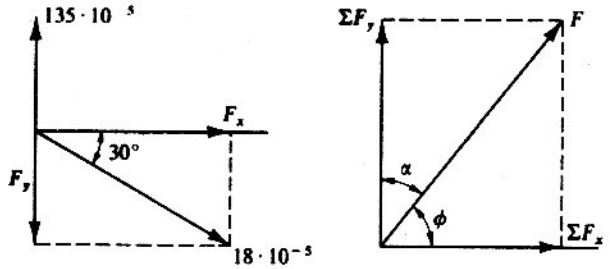


Figura 1-5

Solución. II. La resultante también se puede hallar si se dibuja un sistema de coordenadas de tal manera que el origen coincida con la carga de $25 \cdot 10^{-9}$. Los vectores se descomponen y se suman vectorialmente. El vector $18 \cdot 10^{-5}$ se puede descomponer en sus dos componentes cartesianas:

$$F_y = 18 \cdot 10^{-5} \text{ sen } 30^\circ = 9 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$
$$F_x = 18 \cdot 10^{-5} \cos 30^\circ = 15{,}58 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

La suma de estas fuerzas es:

$$\Sigma F_y = 135 \cdot 10^{-5} - 9 \cdot 10^{-5} = 126 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$
$$\Sigma F_x = 15{,}58 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$
$$F = \sqrt{(126 \cdot 10^{-5})^2 + (15{,}58 \cdot 10^{-5})^2} = 127 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

El ángulo es:

$$\text{sen } \phi = \frac{126 \cdot 10^{-5}}{127 \cdot 10^{-5}} = 0{,}992 \quad \therefore \phi = 83^\circ \text{ y } \alpha = 90^\circ - 83^\circ = 7^\circ$$

Problema 1-9 Se sabe que cuando dos bolas de saúco están cargadas se separan 20 centímetros. Las cargas son iguales. Si la longitud de la cuerda es de 24 centímetros y el peso de las bolas de 0,04 gramos, ¿cuál es la carga que hay en cada bola?

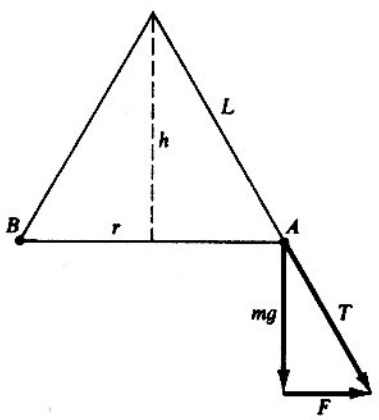


Figura 1-6

Solución. De la Figura 1-6, por semejanza de triángulos, se obtiene que:

$$\frac{mg}{F} = \frac{h}{\left(\frac{r}{2}\right)}$$

de donde $F = \frac{mgr}{2h}$. Según la ley de Coulomb, $F = k\frac{QQ'}{r^2}$.

Igualando las dos expresiones anteriores se obtiene:

$$\frac{mgr}{2h} = k\frac{QQ'}{r^2}$$

Si $Q = Q'$, entonces la carga de una bola está dada por $Q = \sqrt{mgr^3/k2h}$.

La altura está dada por $h = \sqrt{24^2 - \left(\frac{20}{2}\right)^2} = 21{,}8$ cm. Entonces la carga está dada por:

$$Q = \sqrt{\frac{0{,}04 \cdot 980 \cdot 20^3}{2 \cdot 21{,}8}} = 84{,}84 \text{ stat C} = 84{,}84 \text{ stat C} \cdot \frac{1 \text{ C}}{3 \cdot 10^9 \text{ C}} = 28{,}28 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

Problema 1-10 En el modelo de Bohr correspondiente al átomo de hidrógeno, un electrón describe una órbita circular alrededor de un núcleo que contiene un solo protón. Si el radio de órbita es $5{,}28 \cdot 10^{-9}$ centímetros, calcule el número de revoluciones que da el electrón por segundo. La fuerza de atracción electrostática entre protón y electrón proporciona la fuerza centrípeta.

Solución. $Q = Q' = 4{,}8021 \cdot 10^{-10}$ u.e.e. y la constante $K = 1$; por tanto, la fuerza de atracción electrostática es:

$$F = \frac{QQ'}{r^2} = \frac{(4{,}802 \cdot 10^{-10})^2}{(5{,}28 \cdot 10^{-9})^2} = \frac{23{,}056 \cdot 10^{-20}}{27{,}878 \cdot 10^{-18}} = 0{,}82 \cdot 10^{-2} \text{ dinas}$$

Es decir, $F = 827 \cdot 10^{-5}$ dinas.

De la ecuación que da la fuerza centrípeta y la velocidad del electrón $F = m\omega^2 R$, con $m = 9{,}11 \cdot 10^{-28}$ g, se obtiene que:

$$\omega^2 = \frac{F}{mR} = \frac{0{,}827 \cdot 10^{-2}}{9{,}11 \cdot 10^{-28} \cdot 5{,}28 \cdot 10^{-9}} = 0{,}0171 \cdot 10^{35}$$

puesto que la atracción electrostática es igual a F.

Entonces la velocidad angular es:

$$\omega = 0{,}414 \cdot 10^{17} \text{ rad/seg} = \frac{0{,}414 \cdot 10^{17}}{2\pi} \text{ r.p.s.} = 0{,}661 \cdot 10^{16} \text{ r.p.s.} = 60 \cdot 0{,}661 \cdot 10^{16} \text{ r.p.m.} = 3{,}96 \cdot 10^{17} \text{ r.p.m.}$$

que es la velocidad con que gira el electrón alrededor del protón.

Problema 1-11 Dos esferas de iguales radios y pesos están suspendidas de hilos de manera que sus superficies se toquen. Después de comunicarles una carga de $q_0 = 4 \cdot 10^{-7}$ culombios se han repelido y distanciado formando los hilos un ángulo de 60°. Halle el peso de las esferas si la distancia desde el punto de suspensión hasta el centro de la esfera es igual a 20 centímetros. (Fig. 1-7.)

Solución. Sea 2θ el ángulo que forman los hilos. Sobre cada esfera actúan dos fuerzas: el peso P de la esfera y la fuerza F_1 de repulsión de Coulomb; P es la resultante de estas fuerzas, pero $F_1 = P \operatorname{tg} \theta = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ y $r/2 = l \operatorname{sen} \theta m$, de donde tenemos que:

$$P = \frac{F_1}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \, 4l^2 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{tg} \theta}$$

Cada esfera lleva una carga $q = q_0/2$. Al remplazar los valores numéricos se encuentra que $P = 0{,}0157$ N $= 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ kgf.

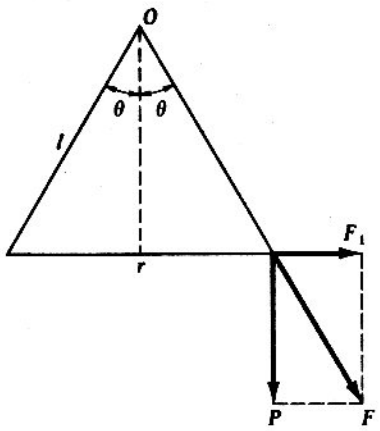


Figura 1-7

Problema 1-12 Halle la densidad del material de las esferas del problema anterior si se sabe que al sumergirlas en keroseno el ángulo de separación de los hilos es de 54°.

Solución. Para la esfera que se halla en el aire se verifica la ecuación (vea el problema anterior):

$$P = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1\, 4l^2\, \operatorname{sen}^2\theta_1\, \operatorname{tg}\theta_1} \tag{1}$$

Al sumergir las esferas en keroseno, sobre cada esfera empieza a actuar la fuerza P_1 ascensional. Para la esfera que se halla en el keroseno, se tiene que:

$$P - P_1 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2\, 4l^2\, \operatorname{sen}^2\theta_2\, \operatorname{tg}\theta_2} \tag{2}$$

De la ecuación (2) se obtiene:

$$P - P_1 = (\rho_1 - \rho_2)\, Vg \tag{3}$$

siendo ρ_1 la densidad del material de la esfera, ρ_2 la del keroseno, V el volumen de la esfera y g la aceleración de la gravedad. De las ecuaciones (1), (2) y (3) se obtiene:

$$\frac{P - P_1}{P} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta_1\, \operatorname{tg}\theta_1\varepsilon_1}{\operatorname{sen}^2\theta_2\, \operatorname{tg}\theta_2\varepsilon_2} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}, \text{ de donde } \rho_1 = \frac{\operatorname{sen}^2\theta_2\, \operatorname{tg}\theta_2\varepsilon_2}{\operatorname{sen}^2\theta_2\, \operatorname{tg}\theta_2\varepsilon_2 - \operatorname{sen}^2\theta_1\theta_1\varepsilon_1}\,\rho_2$$

Al remplazar los datos numéricos en el problema se obtiene: $\rho_1 = 2550\ \text{kg/m}^3$.

Problema 1-13 Cuando a una esfera de 1 centímetro de radio, conductora y cargada, y en el aire, se le proporciona una carga superior a unos $3 \cdot 10^{-8}$ culombios, el aire que la rodea se hace conductor y la carga escapa. Utilice la cifra anterior como carga máxima que una esfera puede retener para calcular la fuerza máxima entre dos esferas cuando la distancia entre sus centros es de 10 centímetros.

Solución. $Q \leq 3 \cdot 10^{-8}$ C, $d = 10$ cm, $K = 1$ y $Q = Q'$. Entonces la fuerza está dada por:

$$F = \frac{Q^2}{d^2} = \left(\frac{Q}{d}\right)^2 = \left(\frac{90}{10}\right)^2 = 81 \text{ dinas, porque } Q = 3 \cdot 10^{-8}\text{ C} = 90 \text{ u.e.e.}$$

Problema 1-14 Cargas puntuales de $2 \cdot 10^{-14}$ culombios, $1 \cdot 10^{-14}$ culombios, $-3 \cdot 10^{-14}$ culombios y $2 \cdot 10^{-14}$ culombios se colocan en los vértices de un rectángulo $ABCD$, como lo muestra la Figura 1-8. ¿Qué fuerza ejercen las demás cargas sobre la carga situada en D?

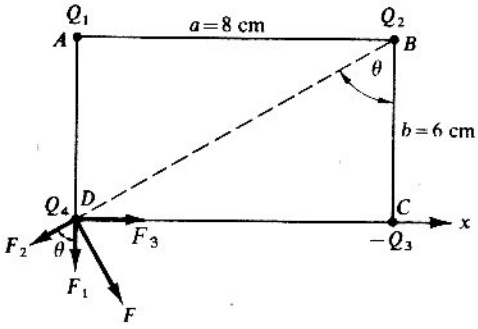


Figura 1-8

Solución. La figura muestra las fuerzas que actúan sobre Q_4. Los ejes coordenados se han dibujado como lo indica la figura.

Las tres fuerzas que actúan sobre Q_4 se combinan para producir la fuerza F de componentes F_x y F_y a lo largo de los dos ejes seleccionados. Descomponga F_2.

Observe que $BD = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ cm. Entonces $F_x = F_3 - F_2 \operatorname{sen} \theta$, $F_y = F_1 + F_2 \cos \theta$.

De las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$F_x = \frac{Q_3 Q_4}{4\pi\varepsilon_0 a^2} - \frac{Q_2 Q_4}{4\pi\varepsilon_0 (a^2 + b^2)} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{Q_4}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{Q_3}{a^2} - \frac{Q_2 a}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \right] =$$

$$= 2 \cdot 10^{-14}\,\text{C} \cdot 9 \cdot 10^9\,\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2} \left[\frac{3 \cdot 10^{-14}\,\text{C}}{64 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2} - \frac{1 \cdot 10^{-14}\,\text{C} \cdot 8 \cdot 10^{-2}\,\text{m}}{10^{-3}\,\text{m}^3} \right] \approx 7 \cdot 10^{-16}\,\text{N}$$

En forma análoga se encuentra que:

$$F_y = \frac{Q_4}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{Q_1}{b^2} + \frac{Q_2 b}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \right] \approx 11 \cdot 10^{-16}\,\text{N}$$

La magnitud del vector **F** es $\sqrt{7^2 + 11^2} \cdot 10^{-16}\,\text{N} \approx 13 \cdot 10^{-16}\,\text{N}$ y forma un ángulo $\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{11}{7} \approx 58°$ con la dirección del eje X.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. ¿Con qué fuerza se repelerían dos esferas cargadas cada una con un 1 culombio a la distancia de 1 kilómetro? Las esferas se suponen en el vacío. Exprese el resultado en dinas y newtons.

2. El peso de un cuerpo muy pequeño parece disminuir en 0,1 gramo cuando se coloca debajo de él y a 3 centímetros de distancia una carga positiva de $0{,}4 \cdot 10^{-9}$ culombios. Calcule el signo y el valor de la carga en el primer cuerpo.

3. Una carga puntual de $+80$ u.e.e. dista 5 centímetros de una carga puntual de -60 u.e.e. Calcule: *a*) ¿Qué fuerza en dinas ejerce cada carga sobre la otra? *b*) Una carga puntual de $+14{,}4$ u.e.e. está a 4 centímetros de la carga positiva anterior y a 3 metros de la carga negativa. Calcule la fuerza resultante sobre ella.

4. Dos esferas muy pequeñas, cada una de las cuales pesa 3 dinas, están sujetas a hilos de seda de 5 centímetros de longitud y cuelgan de un punto común. Cuando se suministra a las esferas una cantidad igual de carga negativa, cada hilo forma un ángulo de 30° con la vertical. Calcule el valor de las cargas.

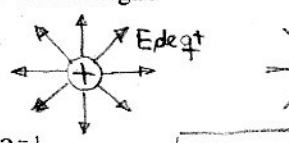
CAPITULO 2

Campo eléctrico

Campo eléctrico es la región del espacio dentro de la cual existen fuerzas de naturaleza eléctrica. Tiene carácter vectorial y se considera su *dirección en un punto* como la de la fuerza que actúa sobre una carga positiva situada en dicho punto. Se toma como positivo el sentido de las cargas positivas a las negativas.

La *intensidad del campo* **E**, en un punto, se define como el cociente de dividir la fuerza **F** que actúa sobre la carga $+q'_A$ situada en él por el valor de dicha carga:

$$\mathbf{E}_{1\text{-}A} = \frac{\mathbf{F}_{1\text{-}A}}{q'_A} \qquad (2\text{-}1)$$



$$[E] = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{F}_{1\text{-}A} = q_A \mathbf{E}_{1\text{-}A}}$$

Solo averiguo encontrar E

Una carga situada en un punto de un campo crea en él su propio campo, alterando la distribución de las cargas de aquél y, en consecuencia, perturbando la medida de la intensidad. Esta perturbación es menor cuando la carga es suficientemente pequeña y, por ello, el valor preciso de E se obtiene en el límite:

$$\mathbf{E} = \lim_{q' \to 0} \frac{\mathbf{F}}{q'} \qquad \text{definición} \qquad (2\text{-}2)$$

Relacionando (2-1) con (2-2) se obtiene:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q'} = \frac{k \cdot \frac{q q'_2}{r^2}}{q'_2} = k \cdot \frac{q_1}{r^2} \cdot \mathbf{u}$$

si: $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{r}$

La intensidad de campo eléctrico (creado por q_1) en un punto P cualquiera del espacio es:

$$\boxed{\mathbf{E}_{1\text{-}P} = k \cdot \frac{q_1}{r^2_{1\text{-}P}} \cdot \mathbf{u}_{1\text{-}P}} \qquad \boxed{E_{1\text{-}P} = k \cdot \frac{q_1}{r^2_{1\text{-}P}}}$$

pero, Si en el punto P se encuentra una carga eléctrica A entonces:

$$\mathbf{E}_{1\text{-}A} = \frac{\mathbf{F}_{1\text{-}A}}{q_A} = k \frac{q_1}{r^2_{1\text{-}A}} \mathbf{u}_{1\text{-}A}$$

$$E_{1\text{-}A} = \frac{F_{1\text{-}A}}{q_A} = k \frac{q_1}{r^2_{1\text{-}A}} \qquad (2\text{-}3)$$

Cuando el campo sea creado por varias cargas $q_1, q_2, \ldots, q_n$ situadas a distancias $r_1, r_2, \ldots, r_n$ de un punto P, la intensidad del campo resultante es la *suma vectorial* de los campos individuales:

Siempre y cuando el medio entre todas las cargas sea el mismo

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{E}_{R_P} = \mathbf{E}_{1\text{-}P} + \mathbf{E}_{2\text{-}P} + \ldots + \mathbf{E}_{n\text{-}P} = k \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r^2_{i\text{-}P}} \cdot \mathbf{u}_{i\text{-}P}}$$

Pero si el medio entre el Punto P y las cargas no es el mismo

$$\Rightarrow \mathbf{E}_{R_P} = \sum_{i=1}^{n} k_i \frac{q_i}{r_{i\text{-}P}} \mathbf{u}_{i\text{-}P}$$

y tomando fracciones elementales de q, Δq suficientemente pequeñas, en el límite obtendremos:

$$\mathbf{E} = k \cdot \lim_{\Delta q \to 0} \Sigma \frac{\Delta q}{r^2} \cdot \mathbf{r}$$

$$\boxed{\mathbf{E} = k \int \frac{dq}{r^2} \mathbf{u}} \qquad (2\text{-}4)$$

producido por un cuerpo de carga q sobre un punto P

donde $dq = f(\rho_q, r)$

pero si en el punto P se encuentra una carga eléctrica A entonces:

$$\mathbf{E}_{R_A} = k \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_{i\text{-}A}} \mathbf{u}_{i\text{-}A} = \frac{\mathbf{F}_{R_A}}{q_A}$$

y si

La analogía en gravitación universal es

$$a_{1\text{-}A} = \frac{F_{1\text{-}A}}{m_A} = G \frac{m_1}{r^2_{1\text{-}A}} \qquad \text{donde } G = 6{,}672 \times 10^{-11} \frac{N m^2}{Kg^2}$$

Superficies equipotenciales: Una superficie equipotencial es toda aquella superficie imaginaria formada por todos los puntos de un campo eléctrico que tienen igual potencial eléctrico, y que además tiene la propiedad de ser perpendicular a las líneas de acción del campo eléctrico.

Teorema de Gauss. El producto escalar $\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{s}$ se denomina flujo electrostático $\Delta\phi$, correspondiente a una superficie $\Delta\mathbf{s}$ situada en un campo $\mathbf{E}$:

$$\Delta\phi = \mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{s}$$

Si el campo $\mathbf{E}$ está creado por una carga puntual q y consideramos $\Delta\mathbf{s}$ como una superficie esférica de radio r, el valor de $\mathbf{E}$ será el mismo en todos los puntos y el flujo valdrá:

$$\phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Phi_e = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}} = \text{flujo eléctrico}$$

Si el campo está creado por varias cargas:

$$\phi = \Sigma \frac{q}{\varepsilon}$$

o bien:

Ley de Gauss generalizada

$$q = \varepsilon \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \qquad (2\text{-}5a)$$

$$\qquad (2\text{-}5b)$$

q: es la carga libre que se encuentra en el interior de la gaussiana
ε: es la permitividad del medio
E: es el campo eléctrico resultante.
ds: diferencial de superficie del cuerpo dado.

(El valor de ϕ es el mismo para cualquier superficie que siendo cerrada contenga las mismas cargas.)

La expresión (2-5) en sus dos formas enuncia el teorema de Gauss: *En un campo electrostático, el flujo eléctrico que sale de una superficie cerrada cualquiera es igual a la suma algebraica de las cargas que se encuentran en el interior de la superficie.*

Aplicaciones del teorema de Gauss. a) *Campo de un conductor esférico cargado.* Exteriormente la distribución de las cargas en la superficie guarda la misma simetría que si el campo se debiese a una carga puntual; por tanto, si q es la carga de la esfera y R su radio:

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = k \cdot \frac{q}{r^2} = k \cdot \frac{q}{R^2}$$

b) *Campo de una lámina infinita cargada y plana.* Considerando la superficie gaussiana representada en la Figura 2-1 y teniendo en cuenta que el plano es infinito, el campo $\mathbf{E}$ es uniforme y dirigido hacia afuera. Si la carga por unidad de superficie sobre el plano es σ, la carga total en la superficie de Gauss es $\sigma \cdot A$.

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{dq}{dA}$$

$$\sigma A = 2\varepsilon_0 E \cdot A$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$ por una lámina (rectangular o circular) infinita delgada

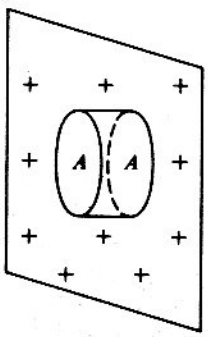


Figura 2-1

El campo eléctrico en un cuerpo dado puede ser hallado con cualquiera de las 2 ecuac.s:
$E = k\int \frac{dq}{r^2}$
$q = \epsilon \int E \cdot ds$

de una carga puntual, de una esfera conductora ($q = \sigma_s 4\pi R^2$) y de una esfera dieléctrica ($q = \rho_q \cdot Volum$)
$E = k\frac{q}{r^2}$ de radio R para $R < r$

$E = k\frac{qr}{R^3}$ de una esfera no conductora (de radio R) $r \leq R$, $q = \rho_q \cdot Volum$

y si es una esfera no conductora
$\Rightarrow E_{MAX} = k\frac{q}{R^2} = \frac{\rho_q}{3\epsilon} R$, $r = R$
$E_{mín} = k\frac{qr}{R^3} = 0$ para $R > r = 0$

$E = k\frac{\lambda}{d}$ donde $d \ll L$ por un alambre delgado de L infinita $L \to \infty$ o por un cilindro de gran longitud y $d >> R$
y λ es la densidad lineal de carga

cuando una esfera cargada toca a otra el paso de cargas de la una a la otra es hasta que
$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$ o $\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2}$

c) *Campo en un punto situado en las proximidades de un conductor.* Consideremos un conductor de densidad superficial de carga $\sigma = \dfrac{\Delta q}{\Delta s}$. **E** será perpendicular a ella y aplicando el teorema de Gauss tendremos:

$$\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{s} = \frac{\Delta q}{\varepsilon}$$

$$E = \frac{\Delta q}{\Delta s \cdot \varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$ entre 2 placas delgadas paralelas

Por tanto, el valor del campo es proporcional a la densidad. Si la densidad aumenta con la curvatura del conductor, el potencial alcanzará valores máximos en las proximidades de las superficies terminadas en punta (fundamento del pararrayos).

Dipolo. Un sistema constituido por dos cargas puntuales $(+q)$ y $(-q)$ situadas a distancia l, o un sistema remplazable por dichas cargas, se llama *dipolo eléctrico.* (Fig. 2-2.)

Momento eléctrico del dipolo es un vector en la dirección de la recta que une las cargas, con sentido de la carga negativa a la positiva y cuyo módulo M vale:

$$\mathbf{M} = q(\mathbf{l}_{q^- \to q^+}) \qquad M = q\,(l) \Rightarrow E_{dipolo} \propto \frac{M}{d}$$

Situado el dipolo en un campo de intensidad **E** queda sometido a un par de fuerzas $(+\mathbf{E} \cdot q)$ y $(-\mathbf{E} \cdot q)$ que le obligan a girar hasta la posición de equilibrio (paralela al campo). El momento del par será $E \cdot q \cdot \overline{DA}$.

$$\mathbf{M}_D = E \cdot q \cdot \overline{DA} = E \cdot q \cdot l \cdot \operatorname{sen} \alpha = E \cdot M \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

Vectorialmente: momento de par o Torque debido a **E**

$$\mathbf{M}_D = \mathbf{M} \times \mathbf{E} = M \cdot E \cdot \operatorname{sen} \alpha$$ cuando $\alpha = 90°$ y $E = 1\,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$

$M = 1\ \mathrm{C} \cdot 1\ \mathrm{m}$, se tiene que: $\mathbf{M}_D = 1\,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \cdot 1\ \mathrm{C} \cdot 1\ \mathrm{m} = 1\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$

Energía potencial
$U = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{E}$
Trabajo debido a **E**
$W = \Delta U$
Torque debido a **E**
$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M} \times \mathbf{E}$

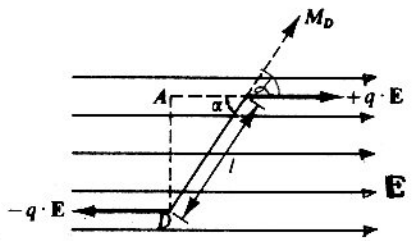


Figura 2-2

potencial eléctrico: V
$V = k\,\dfrac{M \cos\alpha}{r^2}$

El momento de un dipolo es *numéricamente* igual al momento del par a que está sometido cuando su eje es perpendicular a las líneas de fuerza del campo eléctrico uniforme de intensidad $E = 1\,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

Procedimiento para resolver problemas

Para determinar el valor de la intensidad del campo eléctrico en algún punto, imagínese una carga positiva unitaria colocada en dicho punto. Analice la fuerza, o fuerzas, que actúan sobre ella originadas por la carga, o cargas, que se encuentran en los alrededores; las fuerzas se suman vectorialmente y así podrá calcular la fuerza resultante, con lo cual, aplicando la definición de campo eléctrico, podrá calcular su valor fácilmente. El motivo de «utilizar» una carga unitaria positiva también es consecuencia de la definición de campo —fuerza por unidad de carga—. Dibuje siempre un diagrama de la situación descrita por el problema.

Problema 2-1 Calcule la intensidad de un campo eléctrico a 10 centímetros de una carga puntual negativa de 500 unidades electrostáticas sumergida en el aire.

Solución. $E = F/q'$, donde $q' = +1$ u.e.e.

Según la ley de Coulomb:

$$F = k\,\frac{qq'}{r^2} \quad \therefore\ E = k\,\frac{q}{r^2};\quad k = 1 \text{ para el aire}$$

Entonces, $E = 500/(10^2) = 5$ dinas/u.e.e., o 5 líneas/cm^2 apuntando hacia la carga negativa.

Problema 2-2 Calcule cuánto vale la carga de cada una de las bolitas de saúco, suspendidas en el aire de un mismo punto por cuerdas de 5 centímetros de largo, si se rechazan separándose 4 centímetros. Cada bola tiene una masa de 0,1 gramo (Fig. 2-3.)

Solución. Dibuje un diagrama vectorial de las fuerzas que recibe una bolita, teniendo en cuenta que ésta se encuentra en equilibrio mecánico.

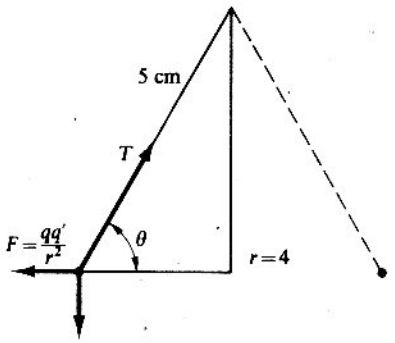


Figura 2-3

Considerando las componentes x:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{o} \quad \frac{-q^2}{r^2} + T\cos\theta = 0$$

Considerando las componentes y:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{o} \quad T\,\text{sen}\,\theta - mg = 0$$

Resolviendo algebraicamente el sistema se obtiene:

$$\begin{cases} T\,\text{sen}\,\theta = mg \\ T\cos\theta = q^2/r^2 \end{cases}$$

$$\therefore\ \text{tg}\,\theta = \frac{mgr^2}{q^2},\ \text{de donde}\ q^2 = \frac{mgr^2}{\text{tg}\,\theta}$$

$$\cos\theta = 2/5 = 0{,}4 \quad \therefore\ \text{tg}\,\theta = 2{,}25 \text{ y } q^2 = \frac{(0{,}1)(980)(4)^2}{2{,}25} = \frac{98(16)}{2{,}25} = 697,\ q = \sqrt{697} = 26{,}4 \text{ u.e.e.}$$

Problema 2-3 ¿Cuál es la intensidad del campo que existe entre una carga de $+20$ microculombios y una carga de -5 microculombios, en el punto medio, si están separadas 50 centímetros?

Solución. Si se escoge el punto medio entre las dos cargas y si se supone que una carga de 1 μC está colocada en dicho sitio, será repelida por la carga de $+20$ μC y atraída por la carga de -5 μC.

La fuerza de repulsión $= k\,\frac{QQ'}{r^2} = 9 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \cdot \frac{20 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot 1 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{(0{,}25\ \text{m})^2} = 2{,}87\ \text{N}$ hacia la derecha.

La fuerza de atracción $= k\,\frac{QQ'}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot 1 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{(0{,}25\ \text{m})^2} = 0{,}72\ \text{N}$ hacia la derecha.

La fuerza resultante es 2,87 N + 0,72 N, o 3,59 N hacia la derecha.

La intensidad del campo es F/Q, y como se ha seleccionado una carga de 1 μC en el punto medio,

$$E = \frac{3{,}59\ \text{N}}{1 \cdot 10^{-6}\ \text{C}} = 3{,}59 \cdot 10^6\ \text{N/C}$$

Problema 2-4 Dos cargas de $50 \cdot 10^{-9}$ culombios y $-50 \cdot 10^{-9}$ culombios se colocan separadas 20 centímetros como lo indica la Figura 2-4. Halle la intensidad del campo en los puntos x, y y z.

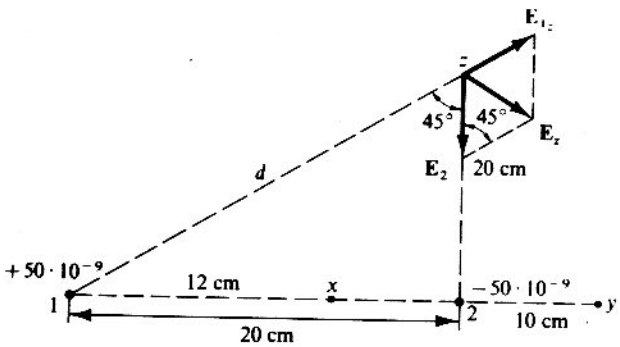


Figura 2-4

Solución. La intensidad del campo en x es:

$$E_{1_x} = kQ/r^2 = 9 \cdot 10^9\,\frac{50 \cdot 10^{-9}}{0{,}12^2} = 3{,}125 \cdot 10^4\ \text{N/C (repele la carga } x\text{)}$$

$$E_{2_x} = 9 \cdot 10^9\,\frac{50 \cdot 10^{-9}}{0{,}08^2} = 7{,}031 \cdot 10^4\ \text{N/C (atrae la carga } x\text{)}$$

$$E_x = E_{1_x} + E_{2_x} = 3{,}125 \cdot 10^4 + 7{,}031 \cdot 10^4 = 10{,}156 \cdot 10^4\ \text{N/C (hacia la derecha)}$$

En y:

$$E_{1_y} = 9 \cdot 10^9\,\frac{50 \cdot 10^{-9}}{0{,}30^2} = 0{,}5 \cdot 10^4\ \text{N/C (repele la carga } y\text{)}$$

$$E_{2_y} = 9 \cdot 10^9\,\frac{50 \cdot 10^{-9}}{0{,}1^2} = 4{,}5 \cdot 10^4\ \text{N/C (atrae la carga } y\text{)}$$

$$E_y = 4 \cdot 10^4\ \text{N/C (hacia la izquierda)}$$

En z: $d^2 = (0{,}20\ \text{m})^2 + (0{,}20)^2 = 8 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$:

$$E_{1_z} = 9 \cdot 10^9\,\frac{50 \cdot 10^{-9}}{800 \cdot 10^{-4}} = 0{,}5625 \cdot 10^4\ \text{N/C (repele la carga en } z\text{)}$$

$$E_{2_z} = 9 \cdot 10^9\,\frac{50 \cdot 10^{-9}}{20^2 \cdot 10^{-4}} = 1{,}125 \cdot 10^4\ \text{N/C (atrae la carga en } z\text{)}$$

Para calcular $\mathbf{E}_z$ por la resultante utilizamos la Figura 2-4 y aplicamos el teorema del coseno:

$$E_z^2 = E_{1_z}^2 + E_{2_z}^2 - 2E_{1_z}E_{2_z}\cos 45° = (5625)^2 + (11\,250)^2 - 2(5625 \cdot 11\,250)\,\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 68\,723\,437{,}50\ \text{N/C} \approx 69609375\ \text{N}^2/\text{C}^2$$

$$\therefore\ E_z = 8343{,}22\ \text{N/C} = 0.8343 \times 10^4\ \text{N/C}$$

Problema 2-5 Una esfera de cobre de 1 centímetro de diámetro se halla en un recipiente con aceite. La densidad del aceite es $\rho = 800\ \text{kg/m}^3$. ¿A qué será igual la carga de la esfera si en un campo eléctrico uniforme la esfera se encuentra en estado de suspensión dentro del aceite? El campo eléctrico va dirigido verticalmente hacia arriba y su intensidad es $E = 36\,000\ \text{V/cm}$.

Solución. Sobre la esfera actúan tres fuerzas: la del campo eléctrico F_1, dirigida hacia arriba; la de la gravedad P, dirigida hacia abajo, y la ascensional F_2, dirigida hacia arriba. Cuando están en equilibrio,

$$P = F_1 + F_2$$

siendo $P = mg = \rho_1 \frac{4}{3} \pi r^3 g$, con ρ_1 la densidad del cobre, y $F_1 = Eq$, $F_2 = \rho_2 \frac{4}{3} \pi r^3 g$, con ρ_2 la densidad del aceite. Resolviendo las ecuaciones anteriores se encuentra que:

$$q = \frac{4\pi r^3 g(\rho_1 - \rho_2)}{3E} = 1{,}1 \cdot 10^{-8}\ \text{C}$$

Problema 2-6 Calcule el campo radial producido por una varilla uniformemente cargada y muy larga.

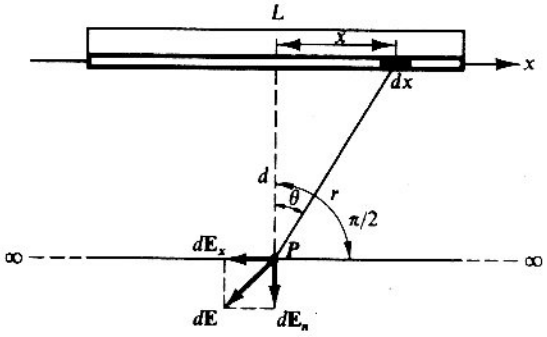


Figura 2-5

Solución. Calculemos primero el campo eléctrico **E** en las proximidades del hilo, en un punto P, situado a una distancia d de la varilla, tomada según la bisectriz de dicha varilla. Si $\lambda = q/L$, siendo:

λ = densidad lineal de carga eléctrica
q = carga eléctrica total
L = longitud de la varilla

la componente del campo eléctrico en P debida a una pequeña porción de varilla, dx, situada a una distancia r de P, será, teniendo en cuenta le corresponde una carga, $dq = \lambda dx$.

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{\lambda dx}{r^2} \qquad (1)$$

Observando en la Figura 2-5 que

$$d = r\cos\theta \Rightarrow r = d/\cos\theta$$
$$x = r\,\text{sen}\,\theta = d \cdot \text{tg}\,\theta$$

tenemos que:

$$dx = d \cdot \sec^2\theta\, d\theta$$

Sustituyendo $r = d/\cos\theta$ y $dx = d \cdot \sec^2\theta\, d\theta$ en (1):

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{\lambda d \cdot \sec^2\theta\, d\theta}{d^2/\cos^2\theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{\lambda}{d}\, d\theta$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{\lambda}{d} \cdot d\theta$$

Como las componentes $d\mathbf{E}$ debidas a los diferentes elementos de carga en que consideramos dividido el hilo no están en la misma dirección, deben de sumarse vectorialmente. Observando la simetría del problema, todas las componentes, según x, de todos los $d\mathbf{E}$ se anulan entre sí, ya que estando P frente al centro de la varilla por cada elemento dx a la distancia x del centro existirá otro simétrico a la $-x$, mientras que las componentes, según la normal (según d), $d\mathbf{E}_n$, se sumarán. Por consiguiente, tomaremos las proyecciones sobre d de cada $d\mathbf{E}$ y sumamos.

Las proyecciones de $d\mathbf{E}$ sobre d, o componentes normales de los $d\mathbf{E}$, serán de valor:

$$dE_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{\lambda}{d} \cos\theta \cdot d\theta$$

Según lo dicho, teniendo en cuenta que para que r recorra la varilla desde su centro hasta el final por un lado, el ángulo θ variará de 0 a $\pi/2$, y considerando la simetría del problema:

$$E = \int dE_n = E_n = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{\lambda}{d} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \cdot d\theta = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon d}$$

$$E = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon d}$$

La longitud de la varilla no influirá en el límite superior de integración (si no es muy larga).

Problema 2-7 Un anillo de radio $R = 10$ centímetros formado por un conductor está cargado negativamente y lleva una carga $q = -5 \cdot 10^{-9}$ culombios. *a*) Halle la intensidad del campo eléctrico en el eje del anillo en los puntos situados a la distancia L del centro del anillo, iguales a 0, 5, 8, 10 y 15 centímetros. *b*) ¿A qué distancia L del centro del anillo la intensidad del campo eléctrico será máxima?

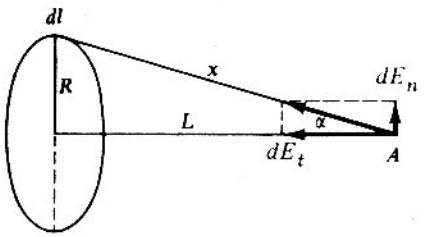


Figura 2-6

Solución. *a*) Sea dl un elemento del anillo. Este elemento lleva una carga dq. La intensidad del campo eléctrico creada en el punto A por este elemento es $dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon x^2}$. Esta intensidad va dirigida según la línea x, que une el elemento dl con el punto A. Para hallar la intensidad creada por todo el anillo hay que sumar geométricamente los dE de todos los elementos. El vector dE se puede descomponer en dos: dE_t y dE_n. Las componentes dE_n de cada dos elementos opuestos diametralmente se eliminan, de donde

$$E = \int dE_t; \quad \text{pero } dE_t = dE\cos\alpha = dE\,\frac{L}{x} = \frac{L\,dq}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon x^3}$$

Por tanto,

$$E = \frac{L}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon x^3}\int dq = \frac{Lq}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon x^3}$$

Pero $x = \sqrt{R^2 + L^2}$, de donde:

$$E = \frac{Lq}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(R^2 + L^2)^{3/2}} \tag{1}$$

que es la intensidad del campo eléctrico en el eje del anillo.

Si $L > R$, se tiene que $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon L^2}$, es decir, a grandes distancias, el anillo cargado se puede considerar una carga puntual. Colocando en (1) los datos numéricos se obtiene que $E = 0, 1600, 1710, 1600, 1150$ V/m.

b) Expresemos las magnitudes x y L en función del ángulo α. Tendremos que $R = x \operatorname{sen} \alpha$ y $L = x \cos \alpha$; de donde la fórmula (1) adquiere la forma:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^2} \cos \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha$$

Para hallar el máximo de la magnitud E se iguala a cero la derivada $dE/d\alpha$.

$$dE/d\alpha = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^2} (\cos^2 \alpha\, 2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha) = 0$$

Será igual a cero si $\operatorname{sen}^3 \alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha$; dividiendo los dos miembros por $(\operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha)$ queda $\operatorname{tg}^2 \alpha = 2$. Por tanto, la distancia L desde el punto A hasta el centro del anillo, donde la intensidad del campo eléctrico es máxima, será $L = \frac{R}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{R}{\sqrt{2}}$. En este caso, $R = 0{,}1$ m; por consiguiente, $L = 7{,}1 \cdot 10^{-2}$ m.

Problema 2-8 En el espacio comprendido entre dos láminas planas y paralelas cargadas con cargas iguales y opuestas existe un campo eléctrico uniforme. Un electrón abandonado en reposo sobre la lámina cargada negativamente llega a la superficie de la lámina opuesta, situada a 2 centímetros de distancia de la primera, al cabo de $1{,}5 \cdot 10^{-8}$ segundos. *a*) Calcule la intensidad del campo eléctrico. *b*) Calcule la velocidad del electrón cuando llega a la segunda lámina.

Solución. *a*) La carga del electrón es $e = 1{,}6029 \cdot 10^{-19}$ C y su masa $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg. La aceleración del electrón es:

$$a = \frac{2x}{t^2} = \frac{2 \cdot 2}{(1{,}5 \cdot 10^{-8})^2} = 1{,}77 \cdot 10^{16} \text{ cm/seg} = 1{,}77 \cdot 10^{14} \text{ m/seg}$$

La fuerza está dada por $F = ma = 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}77 \cdot 10^{14} = 16{,}19 \cdot 10^{-17}$ N y, por consiguiente, el campo entre las láminas paralelas es $E = F/e$.

$$E = \frac{F}{e} = \frac{16{,}19 \cdot 10^{-17}}{1{,}6029 \cdot 10^{-19}} = 10{,}10 \cdot 10^2 = 1010 \text{ N/C}$$

b) La velocidad con que viaja el electrón está dada por:

$$v = \sqrt{2ax} = \sqrt{2 \cdot 1{,}77 \cdot 10^{16} \cdot 2} = 2{,}67 \cdot 10^8 \text{ m/seg}$$

Problema 2-9 Un electrón es proyectado con una velocidad inicial $v = 10$ metros/ /segundo dentro de un campo uniforme creado por las láminas planas y paralelas. El campo está dirigido hacia abajo y es nulo, excepto en el espacio comprendido entre las láminas; el electrón entra al campo por un punto situado a igual distancia de las mismas. Si el electrón pasa por el borde de la lámina superior cuando sale del campo, calcule la intensidad de éste.

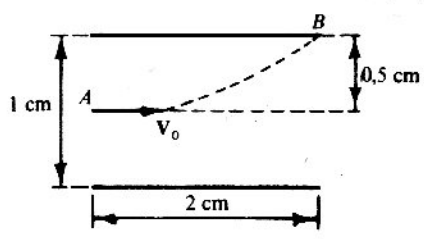


Figura 2-7

Solución. El electrón recorre una trayectoria parabólica desde A hasta B.

$$x = 2 \text{ cm} \qquad x = V_x t \;\therefore\; t = x/v_x = 2 \text{ cm}/10^7 \text{ m/seg} = 2 \times 10^{-9} \text{ seg}$$

$x = 0.5$ cm $\quad y = \frac{1}{2} at^2 \therefore a = 2y/t^2 = 1 \text{ cm}/(210^{-9} \text{ seg})^2 = 2{,}5 \cdot 10^{15} \text{ m/seg}^2$

Ahora: $\quad F = ma = 9{,}11 \times 10^{-31} \text{ kg} \times 2{,}5 \times 10^{-15} \text{ m/seg}^2 = 2{,}27 \times 10^{-15} \text{ N}$

Luego: $\quad E = F/q = F/e = 2{,}27 \times 10^{-15} \text{ N}/1{,}6029 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 1{,}41 \times 10^4 \text{ N/C}$

Problema 2-10 Un electrón es lanzado dentro de un campo eléctrico uniforme de intensidad 5000 newtons/culombio dirigido verticalmente hacia arriba. La velocidad inicial del electrón es 10^7 metros/segundo y forma un ángulo de 30° por encima de la horizontal. *a*) Calcule la altura máxima alcanzada por el electrón por encima de su altura inicial. *b*) ¿Qué distancia horizontal recorrerá el electrón antes de volver a su altura inicial?

Solución. La fuerza sobre el electrón es hacia abajo y el vector E actúa hacia arriba.

a) La aceleración del electrón sobre el eje X es $a_x = 0$ y, según el eje Y, $a_y = F/m = eE/m$. Además, $x = v_0 \cos\theta \cdot t$; siendo t el tiempo; por consiguiente, la altura alcanzada por el electrón es:

$$y = (1/2) \cdot (eE/m)t^2 \text{ y como } t = x/v_0 \cos\theta, \text{ entonces } y = \frac{eE}{2mv_0^2 \cos^2\theta} \cdot x^2$$

Como no se conoce el tiempo, la altura vertical es:

$$y = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2a_y} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2(eE/m)} = \frac{mv_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2eE} = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot (10^7)^2 \operatorname{sen}^2 30^\circ}{2 \cdot 1{,}6029 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^3} = 0{,}142 \cdot 10^{-1} \text{ m} = 1{,}42 \text{ m}$$

b) Para calcular la distancia horizontal es necesario calcular el tiempo, que está dado por $y = \frac{1}{2}(eE/m)t^2$, de donde:

$$t^2 = \frac{2ym}{eE} = \frac{2 \cdot 0{,}142 \cdot 10^{-1} \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}}{1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^3} = 0{,}3228 \cdot 10^{-16} \quad \therefore t = 0{,}568 \cdot 10^{-8} \text{ seg}$$

Como el tiempo que se calculó es el tiempo empleado en alcanzar la altura máxima, el tiempo total es $t = 1{,}137 \cdot 10^{-8}$ seg; por consiguiente, el alcance horizontal es:

$$x = v_0 \cos\theta \cdot t = 10^7 \cdot 0{,}86 \cdot 1{,}137 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 9{,}8 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 9{,}8 \text{ cm}$$

Problema 2-11 En un sistema de coordenadas rectangulares dos cargas positivas de 10^{-8} culombios se encuentran fijas en los puntos $x = 0{,}1$ metro, $y = 0$, $x = -0{,}1$ metro, $y = 0$. Calcule el valor y dirección del campo eléctrico en los puntos: *a*) origen; *b*) (0,2; 0); *c*) (0,1; 0,15); *d*) (0; 0,1).

Solución. *a*) En el origen, el campo eléctrico debido a la carga q_2 es:

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_2}{(-0{,}1)^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-8}}{10^{-2}} = 9 \cdot 10^3 \text{ N/C y su dirección es hacia la derecha}$$

En el origen, el campo producido por la carga q_1 es:

$$E_1 = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-8}}{0{,}1^2} = 9 \cdot 10^3 \text{ N/C}$$

y su dirección es hacia la derecha, puesto que las cargas son positivas; entonces el campo en el origen es:

$$E_0 = E_2 - E_1 = 0$$

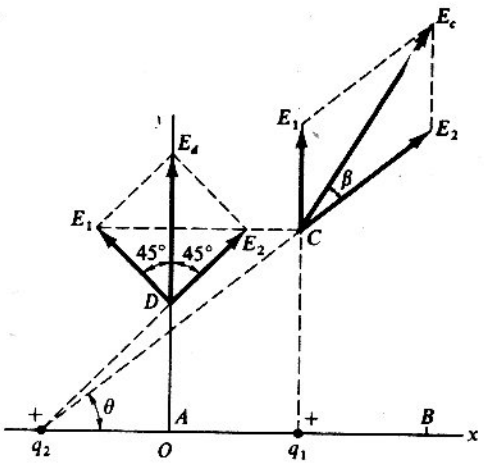


Figura 2-8

b) En el punto $B(0,2; 0)$ la intensidad del campo eléctrico debido a la carga q_1 es:

$$E_1 = K\frac{q_1}{0,1^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-8}}{10^{-2}} = 9 \cdot 10^3 \text{ N/C, hacia la derecha}$$

y el campo:

$$E_2 = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-8}}{0,3^2} = 10^3 \text{ N/C, hacia la derecha}$$

por tanto, en el punto B el vector campo resultante es:

$$E_B = E_1 + E_2 = 10 \cdot 10^3 \text{ N/C}$$

c) En el punto $C(0,1; 0,15)$ el campo creado por la carga q_1 es:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{0,15^2} = 9,10^9 \frac{10^{-8}}{0,15^2} = 4 \cdot 10^3 \text{ N/C, en la dirección indicada en la Figura 2-8}$$

El campo debido a q_2 es:

$$E = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-8}}{0,25^2} = 1,44 \cdot 10^3 \text{ N/C}$$

luego el campo es:

$$E_c = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos(90 - \theta)}$$

y como $\cos\theta = 0,2/0,25 = 0,8$, $E_c = 5 \cdot 10^3$ N/C. La dirección del vector campo con respecto al eje X es $\theta + \beta = 36° + 41° = 77°$.

d) Para el punto $D(0; 0,1)$ situado sobre el eje Y, el campo eléctrico creado por las cargas q_1 y q_2 es:

$$E_1 = E_2 = k\frac{q}{(\sqrt{2} \cdot 10^{-1})^2} = 9,10^9 \frac{10^{-8}}{2 \cdot 10^{-2}} = 4,5 \cdot 10^3 \text{ N/C porque } d = \sqrt{2} \cdot 10^{-1} \text{ m}$$

Como el ángulo entre estos dos vectores es de 90°, el vector resultante en D es

$$E_D = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 6,3 \cdot 10^3 \text{ N/C, y su dirección vertical y hacia arriba}$$

Problema 2-12 La intensidad del campo eléctrico en el espacio comprendido entre dos láminas planas y paralelas cargadas con cargas iguales y de signos opuestos, cada una de las cuales tiene una superficie de 100 centímetros cuadrados, es de 10 newtons/culombio. ¿Cuál es la carga de cada lámina?

Solución. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \dfrac{C^2}{N \cdot m^2}$. La carga por unidad de superficie es $\sigma = q/A$ y, según la ecuación de Gauss, para el campo eléctrico entre las dos láminas paralelas:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 A} \quad \text{y} \quad q = AE\varepsilon_0 = 10^{-2} \cdot 10 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} = 8{,}85 \cdot 10^{-13}\ \text{C}$$

Problema 2-13 Una bola conductora de masa 10^{-3} gramos cuelga de un hilo aislante, fijado a una lámina vertical y conductora. Cuando la carga de la superficie de la lámina es de $5 \cdot 10^{-8}$ culombios/metro cuadrado, la bola es repelida de la superficie y el hilo forma un ángulo de 30° con la vertical. ¿Qué carga ha pasado a la bola?

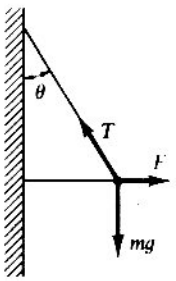


Figura 2-9

Solución. La Figura 2-9 muestra las fuerzas que actúan sobre la bola. Como hay equilibrio:

$$mg = T\cos\theta \quad \text{y} \quad F = T\,\text{sen}\,\theta \quad \text{o} \quad F = mg\,\text{tg}\,\theta. \quad \text{Además,} \quad F = Eq$$

Entonces $F = mg\,\text{tg}\,\theta = Eq = \sigma q/\varepsilon_0$, siendo σ la densidad de carga eléctrica de la lámina. Entonces

$$q = \frac{\varepsilon_0 mg\,\text{tg}\,\theta}{\sigma} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\text{C}^2 \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{N}^{-1} \cdot 10^{-6}\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m} \cdot \text{seg}^{-2} \cdot (1/\sqrt{3})}{5 \cdot 10^{-8}\,\text{C} \cdot \text{m}^{-2}} = 10^{-9}\,\text{C}$$

Problema 2-14 Una gota de aceite de masa $2 \cdot 10^{-4}$ gramos está cargada y situada entre dos láminas de área 100 centímetros cuadrados y paralelas. Cuando la lámina superior tiene una carga de $4 \cdot 10^{-7}$ culombios y la inferior una carga igual y negativa, la gota permanece estacionaria. ¿Qué carga tenía?

Solución. La intensidad eléctrica entre las dos láminas está dada por $E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/A\varepsilon_0$. La fuerza que actúa sobre la gota es $F = qE = qQ/A\varepsilon_0$, y como esta fuerza equilibra el peso de la gota, entonces $mg = qQ/A\varepsilon_0$, de donde:

$$q = \frac{mgA\varepsilon_0}{Q} = \frac{2 \cdot 10^{-7}\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m/seg}^2 \cdot 10^2 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\text{C}^2/\text{m}^2 \cdot \text{N}}{4 \cdot 10^{-7}\,\text{C}} = 43{,}11 \cdot 10^{-14}\,\text{C}$$

Problema 2-15 Dos cargas puntuales de magnitud q están separadas por una distancia $2a$. Halle la intensidad eléctrica en un punto P perpendicular y sobre la bisectriz a una distancia $2a$ del segmento que une las cargas. ¿En qué punto se debe colocar una carga de magnitud q para que la intensidad eléctrica en P sea cero?

Solución. Según la Figura 2-10, por simetría las componentes x de E_1 y E_2 se anulan; por tanto, la intensidad neta E producida por las dos cargas actúa en la dirección del eje Y y es de magnitud:

$$E = 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\,\frac{2a}{r} = \frac{qa}{\pi\varepsilon_0(a^2+4a^2)^{3/2}} = \frac{q}{5\sqrt{5}\pi\varepsilon_0 a^2}$$

Para que la intensidad eléctrica en P sea cero, la intensidad debida a la carga agregada, $Q = q$, debe ser de magnitud E y en la dirección negativa del eje Y. Entonces Q está sobre el eje Y encima de P. La intensidad eléctrica en P debida a Q es:

$$E' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(b-2a)^2} \quad \text{y como } E = E', \text{ entonces } \frac{q}{5\sqrt{5}\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(b-2a)^2}$$

Por tanto,

$$4(b-2a)^2 = 5\sqrt{5}a^2 \quad \text{o} \quad 2(b-2a) = \sqrt{5\sqrt{5}}a, \quad \therefore\ b = \left[\frac{\sqrt{5\sqrt{5}}+4}{2}\right]a$$

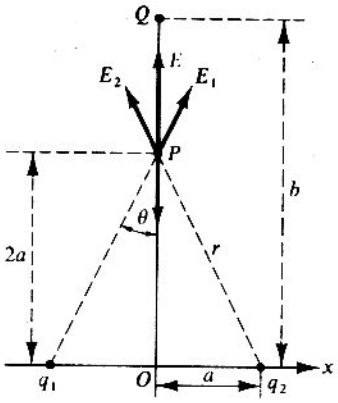


Figura 2-10

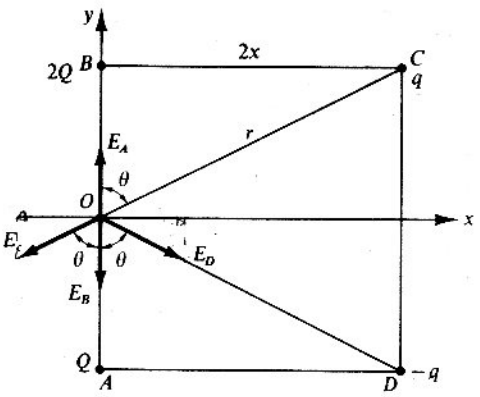


Figura 2-11

Problema 2-16 Cargas puntuales: q, $-q$, $2Q$ y Q se colocan en los vértices de un cuadrado de lado $2x$. Halle la magnitud y dirección de la intensidad eléctrica en el punto medio de AB. ¿Cuál es la relación entre q y Q si la intensidad eléctrica es cero en ese punto?

Solución. Cada una de las cargas en A, B, C y D produce una intensidad eléctrica en O, punto medio de AB, y que se indica en la Figura 2-11 por E_A, E_B, E_C y E_D.

La intensidad eléctrica total E se obtiene sumando vectorialmente las intensidades producidas por cada una de las cargas individuales.

$$E = (E_x, E_y);\quad E_y = +E_A + E_B + E_C\cos\theta + E_D\cos\theta \quad \text{y} \quad E_x = E_C\,\text{sen}\,\theta - E_D\,\text{sen}\,\theta$$

Pero $E_C = E_D = q/4\pi\varepsilon_0 r^2$. Entonces $E_x = 0$ y E_y está en la dirección del eje X. Así,

$$E = E_y = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} - \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} + \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{x}{r} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2xq}{(5x^2)^{3/2}} - \frac{Q}{x^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\left[\frac{2q}{5\sqrt{5}} - Q\right]$$

Si $E = 0$, entonces $\dfrac{2q}{5\sqrt{5}} - Q = 0$ o $q = 2{,}5\sqrt{5}Q$.

Problema 2-17 *a)* ¿Cuál es la intensidad del campo creado por el núcleo de un átomo de oro a una distancia de 10^{-12} centímetros? *b)* ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico creado por un protón a una distancia del mismo de $5{,}28\cdot 10^{-9}$ centímetros?

Solución. *a*) El núcleo del átomo de oro contiene 79 protones a una distancia $r = 10^{-12}$ cm y $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C.

La carga total en el núcleo del átomo de oro es $q = 79e = 79 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C} = 126{,}62 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$. El campo eléctrico a esa distancia del núcleo es:

$$E = k\,\frac{q}{r^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 126{,}62 \cdot 10^{-19}}{(10^{-14})^2} = 1140 \cdot 10^{18}\ \text{N/C}$$

b) Si se considera un protón, el campo eléctrico creado por esta partícula a la distancia $r = 5{,}28 \cdot 10^{-9}$ cm es $E = 9 \cdot 10^9\,\frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}}{(5{,}28 \cdot 10^{-11})^2} = 0{,}51 \cdot 10^{12}$ N/C.

Problema 2-18 Un alambre recto e infinitamente largo tiene una carga positiva uniforme λ culombio/metro. *a*) ¿Cuál es la carga del elemento de longitud dx? *b*) ¿Cuál es la intensidad dE del campo eléctrico creado en el punto P por esta carga? *c*) Calcule el valor y dirección del campo eléctrico resultante en el punto P. (Fig. 2-12.)

Solución. *a*) El elemento de carga dq está dado por:

$$dq = \sigma \cdot dx = \lambda dx\ (\text{C})$$

b) El campo eléctrico en el punto P creado por la carga dq es:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx}{r^2}\ \text{N/C}$$

c) El vector campo eléctrico dE tiene dos componentes, una según el eje X, dE_x y otro según el eje Y, dE_y, dados por:

$$dE_x = dE\,\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\lambda dx}{r^2}\,\operatorname{sen}\theta;\quad dE_y = dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\lambda dx}{r^2}\cos\theta$$

y además: $x = d\operatorname{tg}\theta$; $dx = d\,\operatorname{seg}^2\theta\,d\theta$; $r = d\sec\theta$, entonces:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda dx}{r^2}\operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\operatorname{sen}\theta\,d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}\cdot -\cos\theta\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda dx}{r^2}\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}\operatorname{sen}\theta\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}$$

Por tanto, el campo eléctrico resultante es $\boxed{E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\lambda}{d}}$, perpendicular al eje del alambre.

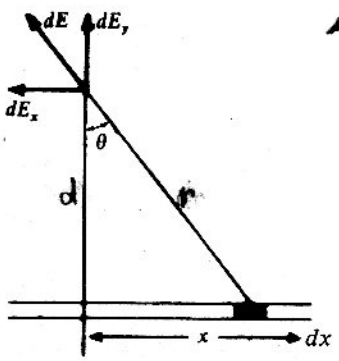


Figura 2-12

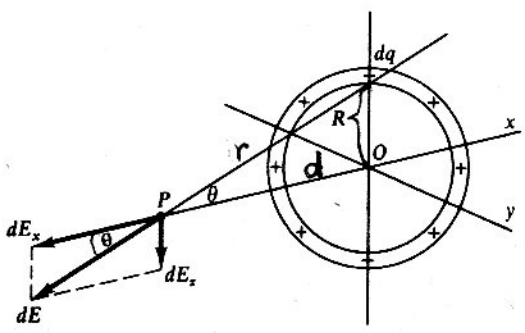


Figura 2-13

d⊥L

d⊥R

Problema 2-19 Un anillo de 1 metro de radio tiene una carga positiva Q de 5×10^{-10} culombios. *a*) Calcule la intensidad del campo eléctrico en puntos del eje del anillo que distan de su centro 0, 10, 20, 30 y 40 centímetros, respectivamente. *b*) En función del radio del anillo, ¿a qué distancia del centro, contada sobre el eje, es máxima la intensidad del campo eléctrico? (Figura 2-13.)

Solución. *a*) El campo eléctrico creado por un segmento del anillo de carga dq en el punto P es $dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2}$, situado en el plano XZ y formando un ángulo θ con el eje X. El vector dE se puede descomponer en componentes según los ejes X y Z. Las componentes dE_z se anulan por simetría: por consiguiente, el campo resultante está dirigido a lo largo del eje X y está dado por:

$$E = \int dE_x = \int dE \cdot \cos\theta = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq \cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot \cos\theta}{r^2}$$

b) En el centro del anillo, $\theta = 90$ y $\cos\theta = 0$; por tanto, para $d_1 = 0$, $E = 0$. El campo eléctrico en el punto del eje del anillo situado respecto de su centro a $d_2 = 10$ cm:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q \cdot d}{r^3} \text{ porque } \cos\theta = d/r \Rightarrow \boxed{E = k \frac{qd}{(R^2+d^2)^{3/2}}}$$ fig. 2.13

Ahora,

$$r = \sqrt{R^2 + d^2} = \sqrt{1^2 + (0.1)^2} = \sqrt{1.01} = 1{,}0049 \text{ m}$$

si $d \gg R \Rightarrow E = k \frac{q}{d^2}$

y el valor del campo eléctrico es:

$$E = k \frac{q \cdot d}{r^3} = 9 \cdot 10^9 \frac{5 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{-1}}{(1{,}0049)^3} = 0{,}44 \text{ N/C}$$

Para los demás casos el proceso es análogo.

Problema 2-20 Un dipolo eléctrico está formado por un par de cargas de signos opuestos. *a*) Muestre que el campo eléctrico creado por el dipolo en el punto P_1 es paralelo al eje X y es igual a $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r^3}$, si L es despreciable con relación a r. *b*) Muestre que el campo eléctrico en P_2 es paralelo al eje X y está dado por $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2q_1}{r^3}$, si L es despreciable en relación con r.

Solución. *a*) En el punto P_1 el campo eléctrico está formado por los vectores E_1 y E_2, que son iguales y miden:

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{s^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

Como el triángulo formado por E_1, E_2 y E es isósceles podemos calcular el módulo de E así:

$$E = 2E_1 \cos\theta$$

Observando la Figura 2-14:

$$\cos\theta = \frac{L/2}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} = \frac{L}{2\sqrt{r^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}}$$

con lo cual:

$$E = E_1 \frac{L}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} \cdot \frac{L}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} \cdot \frac{L\sqrt{r^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}}{r^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qL\sqrt{r^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}}{\left[r^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right]^2}$$

Si $L \ll r$, podemos despreciar L frente a r, con lo que:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qL}{r^3}$$

b) En el punto P_2 el campo eléctrico producido por la carga q_1 es:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\left(r - \frac{L}{2}\right)^2}, \text{ su dirección hacia la derecha}$$

El campo creado por la carga negativa en el mismo punto es:

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\left(r + \frac{L}{2}\right)^2}, \text{ dirigido hacia la izquierda}$$

El campo eléctrico resultante es:

$$E = E_1 - E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q\left[\frac{1}{\left(r - \frac{L}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r + \frac{L}{2}\right)^2}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2rL}{r^4}$$

y como L es despreciable con relación a r, se tiene que:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2qL}{r^3}$$

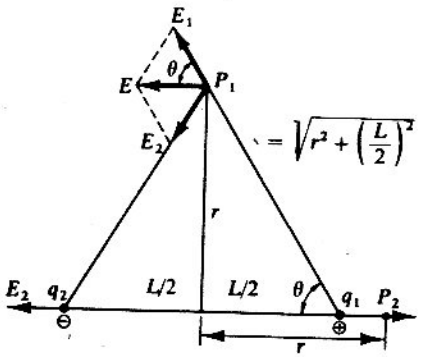


Figura 2-14

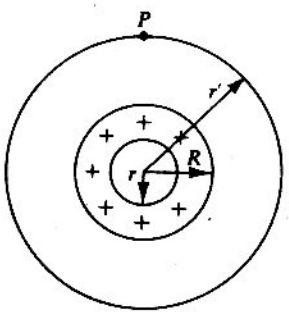


Figura 2-15

Problema 2-21 Una carga positiva está distribuida uniformemente sobre un volumen esférico de radio R, y ρ la carga por unidad de volumen. *a*) Empleando el teorema de Gauss muestre que la intensidad del campo eléctrico dentro del volumen, a una distancia r del centro, es $E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$. *b*) ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico en un punto exterior al volumen esférico y a una distancia r' del centro.

Solución. *a*) El campo eléctrico en la superficie de la esfera interior de radio r está dado, según el teorema de Gauss, por:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

Como el volumen de la esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ y $\rho = q/V$, entonces $q = \rho V = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$ y, por consiguiente, el campo eléctrico es:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{4\pi\rho r^3}{3r^2} = \frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$E = \frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

b) La intensidad del campo eléctrico en un punto exterior al volumen está dada por:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{4\pi R^3\rho}{3r'^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r'^2}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dos cargas puntuales de $Q_1 = \pm 4{,}8 \cdot 10^{-6}$ culombios y $Q_2 = \pm 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ culombios están situadas a 1 metro de distancia. Se pide: *a*) Calcule la intensidad del campo eléctrico que crean en un punto de la recta que las une situado a 40 milímetros de la primera y a 60 centímetros de la segunda. Estudie los cuatro casos que se presentan según el signo de las cargas. *b*) Calcule la fuerza que por efecto de dicho campo actuaría sobre una carga de $q = \pm 5 \cdot 10^{-10}$ culombios situada en dicho punto.

2. En los vértices B y C de un triángulo rectángulo ABC de catetos $AB = AC = 3$ centímetros hay dos cargas eléctricas: $Q_B = 3 \cdot 10^{-9}$ culombios y $Q_C = -4 \cdot 10^{-9}$ culombios. Calcule el campo eléctrico resultante en el vértice A y la fuerza que por efecto de dicho campo actuaría sobre una carga $Q_A = 2 \cdot 10^{-9}$ culombios situada en A.

3. La intensidad del campo eléctrico entre las láminas de un cierto oscilógrafo de rayos catódicos es de 30 000 newtons/culombio: *a*) ¿Cuál es la fuerza ejercida sobre un electrón cuando pasa entre ellas? *b*) ¿Cuál es la aceleración de un electrón cuando está sometido a esta fuerza? (Carga del electrón: $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. Masa del electrón: $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.)

4. En el espacio comprendido entre dos láminas planas y paralelas, cargadas con cargas iguales y opuestas, existe un campo eléctrico uniforme. Un electrón abandonado en reposo sobre la lámina cargada negativamente llega a la superficie de la lámina opuesta, situada a 2 centímetros de distancia de la primera, al cabo de $1{,}5 \cdot 10^{-8}$ segundos. Calcule: *a*) La intensidad del campo eléctrico. *b*) La velocidad del electrón cuando llega a la segunda lámina. (Carga y masa del electrón: $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kilogramos.)

5. Calcule la intensidad del campo eléctrico que actuando sobre un electrón lo sometiese a una fuerza igual a su peso. Datos: Carga del electrón: $e = -1{,}9 \cdot 10^{-19}$ C. Masa del electrón: $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

$V = f(x,y,z)$

$\mathbf{E} = -\nabla V$

$\nabla = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$

CAPITULO 3

$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} \equiv \nabla \times \mathbf{E} = 0$

∴ el campo eléctrico de cargas en reposo es irrotacional

ya que $\mathbf{E} = \nabla V \wedge \nabla \times K\nabla = 0$, $K \in \mathbb{R}$

Potencial eléctrico

Energía potencial eléctrica. La fuerza ejercida por un campo eléctrico de intensidad **E** sobre una carga puntual q' vale $q' \cdot \mathbf{E}$ y el trabajo de dicha fuerza a lo largo de cualquier trayectoria entre dos puntos A y B del campo:

$$W = \int_A^B \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = q' \int_A^B \mathbf{E}\, d\mathbf{r}$$

Como el valor de esta expresión es independiente de la trayectoria seguida entre A y B podemos afirmar la naturaleza conservativa del campo eléctrico y, en consecuencia, establecer que

$$(U)_A - (U)_B = -W \qquad (3\text{-}1)$$

la diferencia entre las energías potenciales de la partícula cargada, en los puntos A y B del campo, es igual y de signo contrario al trabajo realizado por la fuerza que actúa sobre ella entre los mencionados puntos.

Potencial. *Potencial V en un punto* de un campo eléctrico es la energía potencial por unidad de carga en dicho punto:

V_{ab}: Es el trabajo que está realizando un campo eléctrico E para llevar una carga q' de un punto a a otro punto b de potencial diferente

$$V_P = \frac{U_P}{q'}$$

La energía potencial y la carga son escalares y, por ello, el potencial es una magnitud escalar que representa un trabajo por unidad de carga*.

Unidad de potencial. En el sistema M.K.S.C. la unidad de potencial es el voltio, $V = \frac{J}{C}$.

múltiplos:
- 1 statvoltio = 1 statV = $\frac{1}{3}\times 10^3$ V
- 1 kilovoltio = 1 KV = 10^3 V
- 1 megavoltio = 1 MV = 10^6 V
- 1 gigavoltio = 1 GV = 10^9 V

submúltiplos:
- 1 milivoltio = 1 mV = 10^{-3} V
- 1 microvoltio = 1 μV = 10^{-6} V

* También suele definirse el potencial en un punto como el trabajo necesario para trasladar la unidad de carga positiva desde ~~el infinito~~ un punto C donde se considera que $U_C = 0$ al punto que se considera.

$$\Rightarrow V_P = \frac{U_P}{q'} = \int_C^P \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \frac{U_P - U_C}{q'} = k\int \frac{dq}{r_i}$$

para un cuerpo cargado

Diferencia de potencial. Dividiendo por $(-q')$ la expresión (3-1) resulta:

$$V_{ab} = V_B - V_A = \frac{(U)_B}{q'} - \frac{(U)_A}{q'} = \int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \frac{\Delta U}{q'} = \frac{W}{q'} = \frac{\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}}{q'} = \int_A^B \frac{\mathbf{F}}{q'}\cdot d\mathbf{r}$$

como $\frac{\mathbf{F}}{q'} = \mathbf{E}$: $\boxed{\Delta V = V_{ab} = V_B - V_A = \int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}}$ (3-2)

donde $V_A > V_B$

El sentido del vector $d\mathbf{r}$ va en dirección en que el potencial aumente
Ej: si V_P: $- \leftarrow 0 + \rightarrow$ $d\mathbf{r} \rightarrow$

La diferencia $V_B - V_A$ se denomina *diferencia de potencial* o *voltaje* entre los puntos A y B.

Relación entre potencial y campo. Considerando la diferencia de potencial entre dos puntos A y B de un campo creado por una carga q (Fig. 3-1): donde $V_A > V_B$

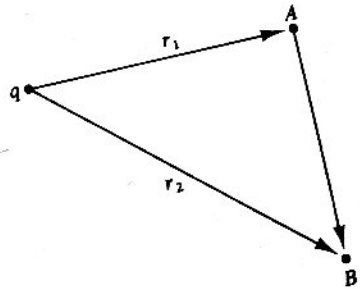
$$\Rightarrow V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \int_A^B k\frac{q}{r^2}\,\mathbf{r}\,d\mathbf{r} = kq\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathbf{r}}{r^2}\cdot d\mathbf{r} = kq\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

para $r_2 = \infty$:

$$V_A = k\frac{q_1}{r} \Rightarrow \boxed{V_P = r_{1-P}\,E_{1-P} = k\frac{q_1}{r_{1-P}}} \qquad (3\text{-}3)$$

de una carga puntual y de una esfera de $r >> R$

El potencial y diferencia de potencial de un cuerpo cargado pueden ser hallados ya sea por la ec. 3-2 o por la ec. 3-4 ya que con ayuda de cualquiera de dichas ec. se llegará a la misma respuesta.



$$\boxed{V_Q = V_P + V_{PQ}}$$

Figura 3-1

Potencial producido por una distribución de cargas. El potencial en cualquier punto de un campo eléctrico, producido por n cargas puntuales $q_1, q_2, \ldots, q_n$, situadas a distancias $r_1, r_2, \ldots, r_n$, del punto que se considera, es la *suma algebraica* de los potenciales debidos a cada carga:

$$\boxed{V_{R_P} = k\left(\frac{q_1}{r_{1-P}} + \frac{q_2}{r_{2-P}} + \ldots + \frac{q_n}{r_{n-P}}\right) = k\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_{i-P}} = \sum_{i=1}^{n} E_{i-P}\,r_{i-P}}$$

de varias cargas puntuales

o bien:

$$\boxed{V = k\int\frac{dq}{r}} \qquad (3\text{-}4)$$

para un cuerpo cargado donde r es la distancia al cuerpo

...ando un cuerpo cargado toca a otro. ...paso de cargas se produce hasta que ...potencial del punto de contacto sea ...mismo con respecto a cualquiera de ...2 cuerpos. $\Rightarrow V_{P_1} = V_{P_2}$

$$\boxed{-\nabla V_P = \mathbf{E}}$$

gradiente del potencial

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 3-1 ¿Cuál es el potencial a 0,5 metros de una carga de 200 microculombios?

Solución. Como $V = k\cdot\frac{Q}{r}$, entonces:

$$V = 9\cdot 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}\cdot\frac{200\cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}}{5\cdot 10^{-1}\ \mathrm{m}} = 360\times 10^4\ \mathrm{N\cdot m/C} = 3{,}6\times 10^6\ \mathrm{V}$$

Problema 3-2 ¿Cuál es el potencial entre dos cargas separadas 2 metros si las cargas son: *a*) +1500 y +1500 picoculombios; *b*) 1500 y −1500 picoculombios; *c*) +1500 y −1000 picoculombios?

Solución. *a*) Como las dos cargas son del mismo signo, el potencial es el doble del producido por una de las cargas. Es decir,

$$V = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{1500 \cdot 10^{-12}\ \text{C}}{1\ \text{m}} = 13{,}6 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{C}} = 13{,}5\ \text{V}$$

El potencial producido por la otra carga de +1500 pC es el mismo; por tanto, el potencial total en el punto medio es: 13,5 V + 13,5 V = 27 V.

b) En este caso, el potencial producido por las dos cargas son iguales y de signo contrario; entonces el potencial en el punto medio es de:

$$13{,}5\ \text{V} - 13{,}5\ \text{V} = 0\ \text{V}$$

c) El potencial producido por la carga de 1500 pC es de 13,5 V y el producido por la otra:

$$V = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{-1000 \cdot 10^{-12}\ \text{C}}{1\ \text{m}} = -9\ \text{V}$$

Por tanto, el potencial en el punto medio es: 13,5 V − 9 V = 4,5 V.

Problema 3-3 ¿Cuál es el potencial en un punto X, equidistante de las cargas de +4 y +5 microculombios y a 0,3 metros del punto medio de la recta que las une, si las cargas están separadas 0,8 metros?

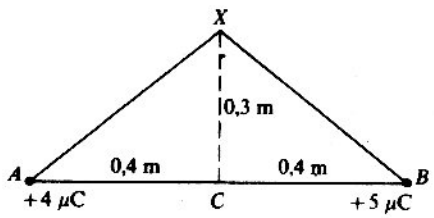


Figura 3-2

Solución. Según el teorema de Pitágoras:

$$\overline{XA}^2 = \overline{CX}^2 + \overline{AC}^2 = (0{,}3)^2 + (0{,}4)^2 = 0{,}25\ \text{m}^2 \quad \therefore \quad XA = 0{,}5\ \text{m}$$

Entonces el potencial total en X es la suma de los potenciales producidos por las cargas separadas. El potencial producido por la carga de +4 μC es:

$$V = k\frac{Q}{r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{0{,}5\ \text{m}} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-1}} \cdot \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{C}} = 7{,}2 \cdot 10^4\ \text{V}$$

El potencial producido por la segunda carga es:

$$V = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{0{,}5\ \text{m}} = 9 \cdot 10^4 \cdot \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{C}} = 9 \cdot 10^4\ \text{V}$$

El potencial total es: $16{,}2 \cdot 10^4\ \text{V} = 1{,}62 \cdot 10^5\ \text{V}$.

Problema 3-4 ¿Cuánto trabajo se requiere para transportar una carga de +500 picoculombios desde un punto situado a 20 metros de una carga de +1000 picoculombios hasta un punto a 2 metros de ella?

Solución. Como trabajo = carga × diferencia de potencial, se debe primero hallar la diferencia de potencial entre los dos puntos.

En un punto a 20 m de la carga de +1000 pC,

$$V_1 = k\frac{Q}{r} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{10^3 \cdot 10^{-12}\ \text{C}}{20\ \text{m}} = 4{,}5 \cdot 10^{-1} \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{C}} = 0{,}45\ \text{V}$$

y en un punto a 2 m de la carga de +1000 pC, $V_2 = 4{,}5$ V.

Entonces la diferencia de potencial entre los dos puntos es de 4,5 V − 0,45 V = 4,05 V. Entonces el trabajo = QV = 500 pC · (4,05 J/C) = $2 \cdot 10^{-9}$ J.

Problema 3-5 En un condensador plano horizontal cuya distancia entre láminas es de $d = 1$ centímetro hay una gota cargada de masa $m = 5 \cdot 10^{-11}$ gramos. Cuando no hay campo eléctrico, la gota cae a cierta velocidad constante debido a la resistencia del aire. Si a las láminas del condensador se aplica una diferencia de potencial $U = 600$ voltios, la gota cae dos veces más despacio. Halle la carga de la gota.

Solución. Cuando no hay campo eléctrico:

$$mg = 6\pi\eta r v_1 \tag{1}$$

Cuando hay campo eléctrico:

$$mg = Eq = 6\pi\eta r v_2 \tag{2}$$

De (1) y (2) se obtiene:

$$mg - Eq = \frac{v_2}{v_1} mg$$

o sea, despejando y teniendo en cuenta que en este caso es $U = Ed$:

$$q = \frac{mg}{E}\left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right) = \frac{mgd}{U}\left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right) = 4{,}1 \cdot 10^{-18}\ \text{C}$$

Problema 3-6 Un electrón con cierta velocidad inicial v_0 se introduce en un condensador plano paralelamente a las láminas y a la misma distancia de ellas. A las láminas del condensador se ha aplicado una diferencia de potencial $U = 300$ voltios. La distancia entre las láminas es $d = 2$ centímetros; la longitud del condensador $l = 10$ centímetros. ¿Cuál ha de ser la velocidad inicial límite v_0 del electrón para que el electrón pueda salir del condensador? Resuelva este problema para el caso de una partícula α.

Solución. El electrón se desplazará en el condensador plano según una parábola de la misma manera que un cuerpo lanzado en el campo de la fuerza de gravedad. Efectivamente, en el condensador, sobre el electrón, actúa una fuerza constante $F = eE$, con lo cual el electrón adquiere una aceleración $a = eE/m$ y al recorrer la distancia l del condensador en el tiempo $t = l/v$ se desviará una distancia:

$$y = \frac{at^2}{2} = \frac{eEl^2}{2mv^2} \tag{1}$$

Para que el electrón salga del condensador, $y \leq d/2$, donde d es la distancia entre las lámina del condensador. De aquí que:

$$v_0 \geq l\sqrt{\frac{eE}{md}}, \text{ ya que de (1) y de } y \leq d/2 \left\{ v_0^2 = \frac{eEl^2}{md} \right.$$

Remplazando los datos numéricos en el problema se obtiene que $v_0 = 3{,}64 \cdot 10^7$ m/seg y para la partícula α, $v_0 = 6 \cdot 10^5$ m/seg.

Problema 3-7 Ocho gotas de agua de 1 milímetro de radio cargadas con 10^{-10} culombios cada una se funden en una gota. Halle el potencial de la gota grande.

Solución. La carga de n gotas es $q_0 = nq$. Esta carga poseerá la gota grande. El radio de la gota grande se halla de la ecuación $n\frac{4}{3}\pi r^3\rho = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$, de donde $R = r\sqrt[3]{n}$. Por consiguiente, el potencial de esta gota será $U = q_0/C = nq/4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R = nq/4\pi\varepsilon_0\varepsilon r\sqrt[3]{n}$. En este caso, $n = 8$, $q = 10^{-10}$ C, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m, $\varepsilon = 1$, $r = 10^{-3}$ m. Remplazando los valores se obtiene que $U = 3600$ V.

Problema 3-8 El área de las láminas de un condensador plano con dieléctrico de aire es de 100 centímetros cuadrados y la distancia entre ellas de 5 milímetros. A las láminas se aplica una diferencia de potencial de 300 voltios. Después de desconectar el condensador de la fuente de tensión se llena el espacio entre las láminas de ebonita. *a*) ¿Cuál será la diferencia de potencial entre las láminas después de cargar el condensador? *b*) ¿Cuáles son las capacidades del condensador antes y después de llenarlo de ebonita? *c*) ¿Cuáles son las densidades superficiales de carga de las láminas antes y después de llenar el condensador de ebonita?

Solución. En este caso, $q_1 = q_2$, donde q_1 y q_2 son las cargas de las láminas del condensador antes y después de llenarlo de ebonita, respectivamente. Así que q = cte. Por consiguiente, la densidad superficial de carga de las láminas:

$$\sigma = q/S = \text{cte}$$

a) Como $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} = U/d$, antes de llenarlo de ebonita tendremos que $\sigma d = U_1\varepsilon_0\varepsilon_1$, y después de llenarlo, $\sigma d = U_2\varepsilon_0\varepsilon_2$. Como σ = cte, tendremos que $\varepsilon_1 U_1 = U_2\varepsilon_2$ y $U_2 = \frac{U_1\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 115$ V.

b) $C_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{d} = 1{,}77 \cdot 10^{-11}$ F, $C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 S}{d} = 4{,}6 \cdot 10^{-11}$ F.

c) $\sigma_1 = \sigma_2 = q/S = CU/S = 5{,}31 \cdot 10^{-7}$ C/m^2.

Problema 3-9 Dos casquetes esféricos se fijan concéntricamente, y el uno aislado del otro. El casquete interior tiene una carga Q y el exterior está conectado a tierra. ¿Cuál es la intensidad eléctrica y el potencial en el espacio que los separa? Cuando el casquete exterior no está conectado a tierra porque una carga fuera del sistema experimenta una fuerza cuando el casquete interior está cargado?

Solución. Debido a la simetría, la intensidad eléctrica E es de la misma magnitud para todos los puntos situados a una distancia r del centro.

Aplicando la ley de Gauss a una región limitada por una superficie esférica de radio r, se tiene que:

$$4\pi r^2 E = Q/\varepsilon_0 \quad \text{o} \quad E = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$$

Como $E = -dV/dr$; $dV = -\frac{Q dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, o $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$, C = cte.

Si el casquete exterior es de radio b, $V = 0$.

$$\therefore\ O = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b} + C \quad \text{o} \quad C = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b} \quad \therefore\ V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)$$

Como el número de líneas de fuerza que llega al casquete exterior es igual al número que sale del casquete interior se induce una carga $-Q$ en el interior del casquete exterior y, como inicialmente estaba descargado, se debe dejar una carga $+Q$ en el exterior del casquete exterior.

Si el casquete exterior está conectado a tierra, electrones fluyen de la tierra para neutralizar la carga positiva. Al no existir la conexión, la carga positiva permanece en el exterior del casquete y produce un campo de fuerza alrededor del sistema, el cual actúa sobre cualquier carga que se coloque en sus alrededores.

Problema 3-10 Un aro metálico de 60 centímetros de diámetro está conectado a un timbre. Recibe una carga de 1 picoculombio. Determine el potencial y la intensidad del campo en el centro del aro y en un punto sobre su eje situado a 30 centímetros del centro. ¿En qué punto del eje es la intensidad del campo máxima?

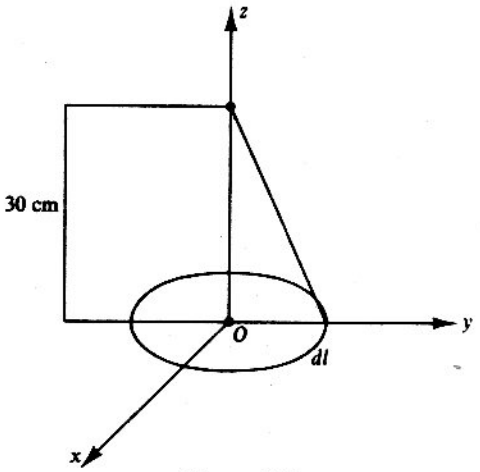


Figura 3-3

Solución. Suponga que el elemento dl sobre el aro tiene una carga dq. El potencial a una distancia z sobre su eje es:

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{y^2 + z^2}}$$

El potencial total en el punto es:

$$V = \int dV = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{y^2 + z^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{y^2 + z^2}}$$

siendo q la carga total sobre el aro. El potencial en el centro del aro es:

$$V_0 = \frac{1 \cdot 10^{-12}\ \text{C} \cdot 9 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2}{0{,}3\ \text{m}} = 3 \cdot 10^{-2}\ \text{V},\ z = 0\ \text{m}$$

El potencial cuando $z = 30$ cm es:

$$V_{0,3} = \frac{1 \cdot 10^{-12}\ \text{C} \cdot 9 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2}{\sqrt{0{,}3^2 + 0{,}3^2}\ \text{m}} = \frac{9 \cdot 10^{-3}}{0{,}42}\ \text{V} = 2{,}12 \cdot 10^{-2}\ \text{V}$$

La intensidad eléctrica en un punto sobre el eje es:

$$E = -\frac{dV}{dz} = +\frac{qz}{4\pi\ (y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Por razones de simetría, la dirección de E es a lo largo del eje z. En el centro del aro E es cero y en $z = 30$ cm es:

$$E_{0,3} = \frac{1 \cdot 10^{-12}\ \text{C} \cdot 0{,}3\ \text{m} \cdot 9 \cdot 10^{9}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2}{(0{,}42)^3\ \text{m}^3} = \frac{2{,}7 \cdot 10^{-3}}{0{,}074}\ \text{V/m} = 36{,}48 \cdot 10^{-3}\ \text{V/m}$$

Es positiva si z es positiva y negativa si z es negativa. La intensidad eléctrica E es cero cuando $z = 0$ o cuando $z = \infty$. Entonces en el intervalo $(0, \infty)$ E tiene un máximo. Para hallar dicno punto es necesario calcular $dE/dz = 0$,

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3qz^2}{4\pi\varepsilon_0(y^2 + z^2)^{5/2}} = 0 \quad \text{o} \quad y^2 + z^2 - 3z^2 = 0 \quad \text{o} \quad z = \pm\frac{y}{\sqrt{2}}$$

A la distancia $(0{,}3/\sqrt{2})$, sobre el eje del aro, E tiene un máximo y es:

$$E_{max} = \frac{1 \cdot 10^{-12}\ \text{C} \cdot (0{,}21)\ \text{m} \cdot 9 \cdot 10^{9}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2}{(0{,}3^2 + 0{,}21^2)^{3/2}\ \text{m}^3} = 7{,}7 \cdot 10^{-3}\ \text{V/m}$$

Para comprobar que es un máximo se debe hallar la segunda derivada de E y verificar que en dicho punto es menor que 0.

Problema 3-11 *a*) Demuestre que cuando una partícula de carga y masa constante se somete a una aceleración, por medio de un campo eléctrico, partiendo de cero, su velocidad final es proporcional a la raíz cuadrada de la diferencia de potencial a través de la cual es acelerada. *b*) Calcule el valor de la constante de proporcionalidad si la partícula es un electrón, con velocidad en metros por segundo, y la diferencia de potencial en voltios. *c*) A velocidades mayores de 1/10 de la velocidad de la luz, la masa de un cuerpo se hace apreciablemente mayor que su masa en reposo y no se puede considerar constante. ¿Con qué voltaje ha de ser acelerado un electrón suponiendo que no varía su masa para que adquiera una velocidad igual a 1/10 de la velocidad de la luz? *d*) ¿Cuál sería la velocidad de un deutón, acelerado con el mismo voltaje?

Solución. $F = ma$ es la fuerza electrostática producida por la diferencia de potencial entre los puntos a través de los cuales la partícula es acelerada. También $F = qE$. En este caso, el campo $E = V/d$, siendo d la distancia recorrida por la partícula. Además la aceleración $a = v^2/2d$.

De las relaciones anteriores se obtiene que $F = ma = qE$;

$$\therefore\ m\frac{v^2}{2d} = \frac{q \cdot V}{d}$$

de donde:

$$1/2mv^2 = qV \quad \therefore\ v^2 = \frac{2qV}{m} \quad \therefore\ v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

b) La constante $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ calculada a partir de las expresiones $V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{r}$ y de $v = \sqrt{\dfrac{2qV}{m}}$, siendo q la carga y m la masa del electrón, se obtiene:

$$k = 5{,}93 \cdot 10^{5}\ \text{N} \cdot \text{m}^2\ \text{C}^{-2}$$

c) Si la velocidad del electrón es $V = 1/10(3 \cdot 10^{8}\ \text{m/seg}) = 3 \cdot 10^{7}\ \text{m/seg}$ y como $v = \sqrt{\dfrac{2qV}{m}}$, resulta que el voltaje es:

$$V = \frac{mv^2}{2q} = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{14}}{3{,}2058 \cdot 10^{-19}} = 25 \cdot 10^{2}\ \text{V} = 2500\ \text{V}$$

d) Si se aplica el mismo voltaje $V = 2500$ V a un deuterón que tiene un protón y un neutrón, ambos de masa $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, y como la carga positiva del protón es $q = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, entonces la velocidad del deuterón es:

$$v = \sqrt{\frac{2qV}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 2500}{3{,}34 \cdot 10^{-27}}} = 5 \cdot 10^{5}\ \text{m/seg}$$

Problema 3-12 Un electrón-voltio es una unidad de energía igual a la energía cinética de un electrón que ha sido acelerado partiendo del reposo, con una diferencia de potencial de 1 voltio. En un acelerador de Van der Graaff los protones se aceleran en una diferencia de potencial de $5 \cdot 10^6$ voltios. ¿Cuál es la energía final de los protones en electrón-voltios y julios y cuál su masa y su velocidad? ¿Cuál es la velocidad de un deuterón cuya energía cinética es de 100 electrón-voltios?

Solución. Un protón tiene una carga positiva. La energía que adquiere al pasar por una diferencia de potencial de 5 MV es:

$$E = 5\,\text{MVe} = 5 \cdot 10^6\,\text{V} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{C} = 8 \cdot 10^{-13}\,\text{J}$$

Para determinar la masa a esta energía se emplea la ecuación $E = mc^2$:

$$m = E/c^2 = \frac{8 \cdot 10^{-13}\,\text{J}}{(3 \cdot 10^8)^2\,\text{m}^2/\text{seg}^2} = 0{,}89 \cdot 10^{-29}\,\text{kg}$$

Esta es la masa equivalente a la energía adquirida. La masa total que posee la partícula se obtiene sumando a esta masa la masa en reposo. Entonces:

$$M = m + m_0 = (0{,}89 \cdot 10^{-29} + 1{,}67 \cdot 10^{-27})\,\text{kg} = 1{,}68 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$$

Además, $v/c = \sqrt{1 - \frac{m_0}{M}} = \sqrt{1 - \frac{1{,}67}{1{,}68}} = 0{,}074$; $\therefore\ v = 0{,}074 \cdot 3 \cdot 10^8\,\text{m/seg} = 2{,}22 \cdot 10^7\,\text{m/seg}$. Como el deuterón tiene un protón y un neutrón de igual masa, su masa es:

$$m = 2(1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}) \text{ y su energía cinética } E_c = 100\,\text{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-17}\,\text{J}$$

Su velocidad es:

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-17}}{2(1{,}67 \cdot 10^{-27})}} = \sqrt{0{,}96 \cdot 10^{10}} = 9{,}8 \cdot 10^4\ \text{m/seg}$$

Problema 3-13 *a*) En un diodo la diferencia de potencial entre el ánodo y el cátodo es de 300 voltios. Un electrón abandona la superficie del cátodo sin velocidad inicial. ¿Cuál es su velocidad cuando llega al ánodo? *b*) Si un electrón recorre la distancia que separa dos placas entre las cuales se mantiene una diferencia de potencial de 1000 voltios, ¿con qué velocidad y con qué energía llega el electrón a la placa positiva?

Solución. *a*) El electrón recorre un espacio entre el cual hay una diferencia de potencial de 300 V. La energía adquirida es de $1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{C} \cdot 300\,\text{V} = 4{,}8 \cdot 10^{-17}\,\text{J}$. Además,

$$1/2mv^2 = 4{,}8 \cdot 10^{-17}\,\text{J} \quad \text{o} \quad v^2 = \frac{2 \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-17} \cdot \text{J}}{9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}} = 1{,}05 \cdot 10^{14}\,\text{m}^2/\text{seg}^2 \quad \therefore\ v = 1{,}026 \cdot 10^7\,\text{m/seg}.$$

b) El electrón recorre el espacio entre las dos láminas entre las cuales existe una diferencia de potencial de 1000 V. La energía que adquiere es de $1000\,\text{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-16}\,\text{J}$. Además:

$$1/2mv^2 = 1{,}6 \cdot 10^{-16}\,\text{J} \quad \text{o} \quad v^2 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^{-16}\,\text{J}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}} = 3{,}5 \cdot 10^{14}\,\text{m/seg} \quad \therefore\ v = 1{,}88 \cdot 10^7\,\text{m/seg}$$

Problema 3-14 Una gota de aceite tiene una carga de $4{,}8 \cdot 10^{-19}$ culombios y tiene un radio de 10^{-6} metros. ¿Cuál es su velocidad final cuando atraviesa dos placas horizontales que se mantienen a una diferencia de potencial de 500 voltios y están separadas 2 centímetros?

La positiva, en la parte superior. Las densidades del aceite y aire son de 800 kilogramos/metro cúbico y 1,29 kilogramos/metro cúbico, y la viscosidad del aire $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ N · seg/m^2.

Solución. Si dos placas están separadas por una distancia d y mantenidas a una diferencia de potencial V, la intensidad eléctrica E es $E = V/d$.

La fuerza electrostática actúa hacia arriba y su magnitud es $qE = qV/d$. Sobre la gota actúan hacia abajo su peso y hacia arriba la fuerza retardatriz de la viscosidad y el empuje. Cuando se alcanza la velocidad final, las fuerzas están en equilibrio y

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = \frac{4}{3}\pi r^3 \sigma g + \sigma \pi \eta r v + \frac{qV}{d}$$

r el radio de la gota, ρ la densidad, σ y η la densidad y viscosidad del aire y v la velocidad final. Entonces:

$$v = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho - \sigma) - \frac{qV}{d}}{6\pi\eta r} = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot 10^{-18} \cdot 9{,}8 \cdot (800 - 1{,}29) - \frac{4{,}8 \cdot 10^{-19} \cdot 500}{0{,}02}}{6\pi \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-6}} =$$

$$= \frac{(3{,}27 - 1{,}2)10^{-14}}{3{,}4 \cdot 10^{-10}} \text{ m/seg} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ m/seg}$$

Problema 3-15 ¿Qué trabajo es necesario para traer una carga positiva de 10^{-9} culombios desde el infinito a cada uno de los puntos A, B y C sabiendo que en los puntos 1 y 2 hay carga de $+12 \cdot 10^{-9}$ culombios y $-12 \cdot 10^{-9}$ culombios, respectivamente? ¿Qué interpretación tiene el signo menos?

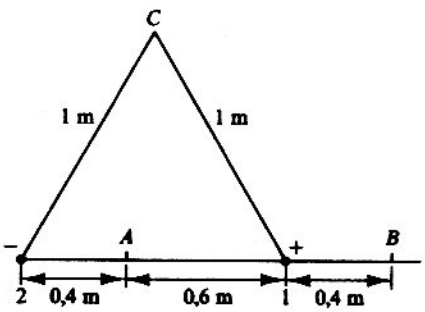


Figura 3-4

Solución. *a*) El trabajo realizado para traer desde el infinito la carga q' al punto A es:

$$T_A = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right)$$

r_1 y r_2 las distancias a las cargas q_1 y q_2 al punto A:

$$T_A = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-9}\left(\frac{12 \cdot 10^{-9}}{6 \cdot 10^{-1}} - \frac{12 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 10^{-1}}\right) = -9 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

El signo menos significa que el trabajo eléctrico es negativo, puesto que el punto A a la diferencia de potencial de las cargas es negativo.

b) En este caso el trabajo es:

$$T_B = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right) = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-9}\left(\frac{12 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 10^{-1}} - \frac{12 \cdot 10^{-9}}{14 \cdot 10^{-1}}\right) =$$

$$= 9 \cdot \frac{15}{7} \cdot 10^{-8} = 19{,}28 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

con $r_1 = 4 \cdot 10^{-1}$ m y $r_2 = 14 \cdot 10^{-1}$ m. El signo más significa que el trabajo es positivo, porque el potencial en B es positivo.

c) Para el punto C el trabajo es:

$$T_C = 9 \cdot 10^{-9} \cdot 10^9 \left(\frac{12 \cdot 10^{-9}}{1} - \frac{12 \cdot 10^{-9}}{1} \right) = 0$$

con $r_1 = r_2 = 1$ m.

Problema 3-16 La esfera de un generador de Van der Graaff está cargada a un potencial de $2 \cdot 10^6$ voltios. *a*) Calcule el radio mínimo de la esfera si la intensidad dieléctrica del aire es de $3 \cdot 10^6$ voltios/metro. *b*) Si la diferencia de potencial entre el borne esférico del generador de Van der Graaff y el punto en el cual se esparcen las cargas sobre la correa es de $2 \cdot 10^6$ voltios. Si la correa proporciona una carga negativa a la esfera a razón de $2 \cdot 10^{-3}$ culombios/segundo y quita carga positiva en la misma proporción, ¿qué potencia es necesaria para mover la polea contra las fuerzas eléctricas?

Solución. *a*) El potencial y la intensidad eléctrica en la superficie de la esfera de radio R son:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad \text{y} \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = V/R$$

Entonces $R = V/E$. Como el valor máximo aceptable de E es $3 \cdot 10^6$ V/m. Por consiguiente, el radio máximo de la esfera es de:

$$R = \frac{2 \cdot 10^6 \text{ V}}{3 \cdot 10^6 \text{ V/m}} = 0{,}66 \text{ m}$$

b) La potencia necesaria es:

$$P = W/t = \frac{q(V_E - V_P)}{t} = \frac{I \cdot t(V_E - V_P)}{t} = I(V_E - V_P) =$$

$$= 4 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^6 = 8 \cdot 10^3 \text{ W} = 8 \cdot 10/735 = 10^3/735 = 10{,}88 \text{ C} \cdot \text{V}$$

puesto que $q = It$.

Problema 3-17 La intensidad del campo eléctrico a una distancia r de un alambre recto, de longitud infinita, que tiene una carga por unidad de longitud λ es perpendicular al alambre y está dada por $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2\lambda}{r}$, siendo λ = densidad lineal de carga. Calcule la diferencia de potencial V_{ab} entre dos puntos situados como lo indica la Figura 3-5.

Solución. La ecuación del gradiente de potencial es:

$$E = -\frac{dV}{dr} \quad \text{o} \quad dV = -E \cdot dr \quad \text{o} \quad dV = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2\lambda}{r} \cdot dr$$

Integrando esta última expresión se obtiene:

$$V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 2\lambda \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r} = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r \Big|_{r_a}^{r_b} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} (\ln r_b - \ln r_a)$$

Por tanto, la diferencia de potencial es: $V_{ab} = V_a - V_b$; entre los puntos a y b es:

$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_b}{r_a}$$

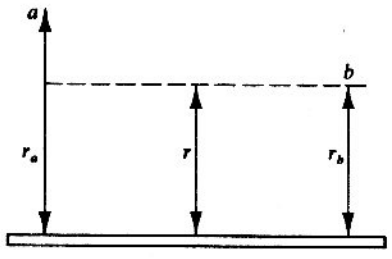


Figura 3-5

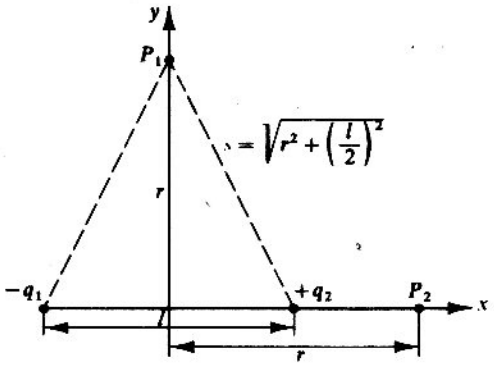


Figura 3-6

Problema 3-18 Calcule el potencial en los puntos P_1 y P_2 de la Figura 3-6, que produce el campo de un dipolo eléctrico, si l es despreciable con relación a r.

Solución. *a*) El gradiente de potencial es: $E = -dV/dr$. El campo en el punto P_1 es:

$$E = \frac{q \cdot l}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

De donde:

$$dV = -\frac{ql\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

e integrando resulta que:

$$V_a = -\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r^3} = \frac{ql}{8\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Como l es despreciable con relación a r resulta: $V_a = \frac{ql}{8\pi\varepsilon_0 r^2} = 0$.

b) El campo eléctrico en P_2 es $E = \frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$, y como el gradiente de potencial es $E = -dV/dr$, el potencial en el punto P_2 es:

$$V_b = -\frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r^3} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Problema 3-19 Dos cargas iguales de $+10^{-6}$ culombios se colocan en dos vértices de un triángulo equilátero. *a*) ¿Qué carga se debe colocar sobre el tercer vértice para que el campo eléctrico sea nulo en el centro de gravedad G del triángulo? *b*) ¿Cuál es el potencial creado por las cargas en el punto G, sabiendo que el lado del triángulo es de 1 metro? ¿Cuál es la energía potencial de una carga de $3 \cdot 10^{-6}$ culombios colocada en G? *c*) Calcule la diferencia de potencial entre el punto G y un punto G' simétrico de G con relación a uno de los lados. Deduzca el trabajo realizado por las fuerzas electrostáticas cuando una carga de $q = 3 \cdot 10^{-6}$ culombios se desplaza de G a G'.

Solución. *a*) Según la Figura 3-7 se debe tener:

$$\mathbf{E}_C = -(\mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B) \quad \text{o} \quad |\mathbf{E}_A| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(AG)^2} = |\mathbf{E}_B|,$$

de donde:

$$|\mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B| = 2|\mathbf{E}_A| \cos 60° = |\mathbf{E}_A|$$

el vector $\mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B$ está dirigido de G hacia C. Entonces:

$$|\mathbf{E}_C| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{(AG)^2}$$

b) El potencial creado en G es el mismo para cada carga. Entonces:

$$V = 3 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{AG}; \quad AG = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot AB = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \text{m}$$

de donde:

$$V = \frac{\sqrt{3} \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 36\pi \cdot 10^9}{4\pi} = 27\sqrt{3} \cdot 10^3 = 46\,764\ \text{V}$$

La energía potencial de la carga de $3 \cdot 10^{-6}$ C colocada en G es: $W = q(V_G - V_\infty)$. Tomando el potencial nulo en infinito: $W = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 27\sqrt{3} \cdot 10^3 = 140 \cdot 10^{-3}$ J.

c) Los potenciales creados por A y B en G', simétrico de G con relación a AB, son idénticos a los creados por G porque $AG' = AG$ y $BG' = BG$.

El potencial creado por C es:

$$V_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{CG'} \quad \text{y} \quad CG' = CH + HG' = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

De donde:

$$V = V_A + V_B + V_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \left[2\sqrt{3} + \frac{3}{2\sqrt{3}}\right] = 38\,970\ \text{V}$$

El trabajo realizado es: $W_{GG'} = q(V_G - V_{G'}) = 3 \cdot 10^{-6}(46\,764 - 38\,970) = 2{,}33 \cdot 10^{-2}$ J

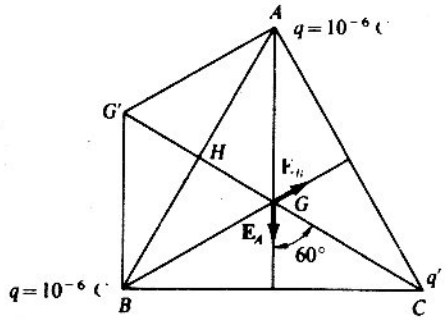


Figura 3-7

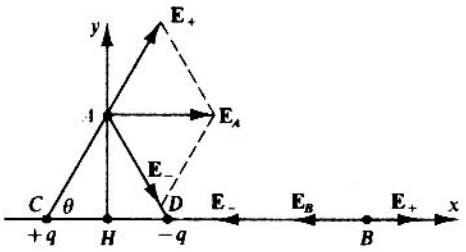


Figura 3-8

Problema 3-20 Un dipolo eléctrico está formado por dos cargas eléctricas del mismo valor q y de signos opuestos y separadas por una distancia l. *a*) Pruebe que el campo eléctrico $\mathbf{E}_A$ creado por el dipolo en el punto A es paralelo al eje X y de módulo $E_A \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot l}{r^3}$ cuando $r > l$. *b*) Pruebe que el campo eléctrico $\mathbf{E}_B$ creado por el dipolo en el punto B es también paralelo al eje X y de módulo $E_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot q \cdot l}{r'^3}$; $r' > l$. *c*) Calcule los potenciales en A y B. (Figura 3-8.)

Solución. *a*) Los campos $\mathbf{E}_+$ y $\mathbf{E}_-$ creados por las cargas $+q$ y $-q$ en A son de la misma magnitud, porque $AC = AD$. $|\mathbf{E}_+| = |\mathbf{E}_-| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{AC^2}$. Las componentes según el eje Y son de signo contrario y, según el eje X, del mismo signo. Las componentes de $\mathbf{E}_A = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$ son:

$$E_{Ax} = \{|\mathbf{E}_+| + |\mathbf{E}_-|\} \cos\theta$$
$$E_{Ay} = \{|\mathbf{E}_+| - |\mathbf{E}_-|\} \operatorname{sen}\theta = 0$$

De donde:

$$|\mathbf{E}_A| = E_{Ax} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\cos\theta}{AC^2} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{CH}{(AC)^3}; \quad CH = \frac{l}{2}; \quad AC^2 = AH^2 + CH^2 = r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$\therefore |\mathbf{E}_A| = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{\left[r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Despreciando $(l/2)^2$ con relación a r^2 se tiene:

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{ql}{r^3}$$

b) En B los vectores campo $\mathbf{E}_+$ y $\mathbf{E}_-$ son de la misma dirección y de sentidos opuestos:

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{(BC)^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\left(r' + \frac{l}{2}\right)^2}; \quad E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{-q}{(BD)^2} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\left(r' - \frac{l}{2}\right)^2}$$

De donde:

$$E_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left(r' + \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r' - \frac{l}{2}\right)^2}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\left(r' - \frac{l}{2}\right)^2 - \left(r' + \frac{l}{2}\right)^2}{\left[r'^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{-2r'l}{\left[r'^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^2}$$

El campo $\mathbf{E}_B$ es paralelo al eje X, dirigido hacia el dipolo de módulo $E_B = \frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}$.

c) Los potenciales en A y B son la suma de los potenciales V_+ y V_- creados por cada carga $+q$ y $-q$ en esos puntos:

$$V_A = V_+ + V_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{AC} - \frac{q}{AC}\right) = 0$$

$$V_B = V_+ + V_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{BC} - \frac{q}{BD}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r' + \frac{l}{2}} - \frac{1}{r' - \frac{l}{2}}\right) = \frac{-q \cdot l}{4\pi\varepsilon_0\left[r'^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]}.$$

Si $r' > l$ se obtiene:

$$V_B = \frac{-ql}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}$$

Problema 3-21 Un anillo de 10 centímetros de radio y una carga positiva de $5 \cdot 10^{-9}$ culombios sobre él. *a*) Calcule la intensidad del campo eléctrico en los puntos del eje del anillo situados a 0, 5, 10 y 15 centímetros del centro. Dibuje los resultados sobre un gráfico. *b*) En función del radio R del anillo, ¿a qué distancia axial de su centro el campo eléctrico es máximo?

Solución. *a*) Considere un elemento de longitud dl del anillo. Tiene una carga $dq = \lambda dl$ (λ = densidad lineal de carga). Esa carga crea en un punto A del eje un campo:

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{(AM)^2} \cdot \mathbf{u}$$

$\mathbf{u}$ es un vector unitario. Cuando el punto P recorre el anillo, el campo $d\mathbf{E}$, creado en A, describe un cono. Por razón de simetría, las proyecciones de todos los campos elementales $d\mathbf{E}$ sobre un plano que pasa por A y paralelo al plano del anillo se anulan dos a dos. La contribución del campo total $\mathbf{E}$ proviene únicamente de las componentes perpendiculares al plano del anillo. Entonces:

$$|\mathbf{E}| = \int_{\text{anillo}} dE \cdot \cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\text{anillo}} \frac{\lambda dl}{AM^2} \cos\theta$$

Haciendo $AM = r$, y como θ, r y λ son constantes, se tiene:

$$|\mathbf{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda\cos\theta}{r^2} \int_{\text{anillo}} dl = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda\cos\theta}{r^2} l$$

$\lambda \cdot l$ es la carga total sobre el anillo, de donde:

$$|\mathbf{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q\cos\theta}{r^2}$$

Haciendo $OA = h$ se obtiene:

$$r^2 = h^2 + R^2 \text{ y } \cos\theta = h/r = \frac{h}{(r^2 + R^2)^{1/2}}$$

de donde:

$$|\mathbf{E}| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{h}{(h^2 + R^2)^{3/2}}$$

Aplicación numérica:

$$E = 5 \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{h}{(h^2 + R^2)^{3/2}} = 45 \cdot \frac{1}{h^2(1 + R^2/h^2)^{3/2}}$$

$h = 0$, $E = 0$

$h = 5 \cdot 10^{-2}$ m, $R/h = 2$ y $E = 45 \cdot \frac{1}{25 \cdot 10^{-4} \cdot 5^{3/2}} = 1{,}61 \cdot 10^3$ V/m

$h = 8{,}10^{-2}$ m, $R/h = 1{,}25$, $E = 1{,}714 \cdot 10^{-3}$ V/m

$h = 10^{-1}$ m, $R/h = 1$ y $E = 1{,}59 \cdot 10^3$ V/m

$h = 1{,}5 \cdot 10^{-1}$ m, $R/h = \frac{2}{3}$ y $E = 1{,}154 \cdot 10^3$ V/m

El gráfico de $E(h)$ se da en la Figura 3-10.

b) Para determinar la distancia h para la cual el campo E es máximo hay que calcular la derivada de $E(h)$ con relación a h, y que se anula en un punto extremo.

$$\frac{dE}{dh} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(h^2 + R^2)^{3/2} - 3h^2(h^2 + R^2)^{1/2}}{(h^2 + R^2)^3}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{R^2 - 2h^2}{(h^2 + R^2)^{5/2}}$$

$$\frac{dE}{dh} = 0 \text{ para } h = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Aplicación numérica: $h = 7{,}07$ cm, que da $E = 1732$ V/m.

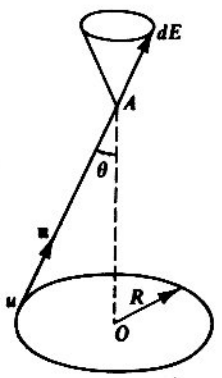


Figura 3-9

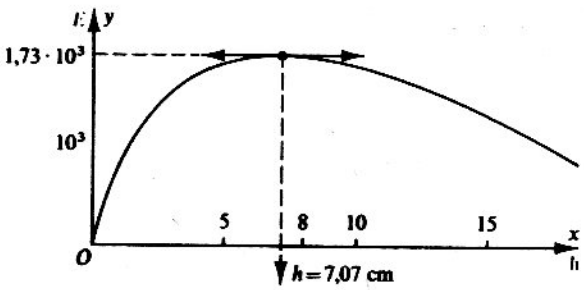


Figura 3-10

Problema 3-22 Un hilo de longitud infinita tiene una carga positiva uniforme por unidad de longitud. *a*) ¿Cuál es la carga dq que contiene un elemento de longitud dy? *b*) ¿Cuál es el campo eléctrico $d\mathbf{E}$ creado en un punto P del espacio situado a una distancia D del hilo por esa carga dq? *c*) Muestre por integración que la amplitud del campo resultante en el punto P es $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 D}$. *d*) Deduzca el resultado de *c*) empleando el teorema de Gauss.

Solución. *a*) Si λ es la densidad de carga (λ = densidad lineal de carga), el elemento dy contiene una carga: $dq = \lambda dy$.

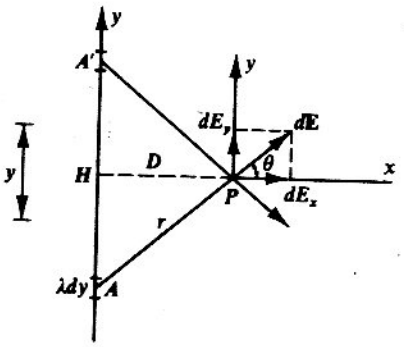


Figura 3-11

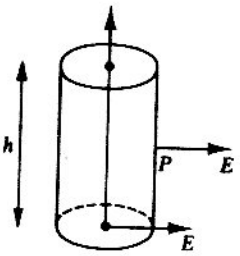


Figura 3-12

b) El campo $d\mathbf{E}$ creado por la carga dq es de magnitud:

$$|d\mathbf{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda dy}{r^2}$$

Las componentes del campo $d\mathbf{E}$ son (vea Fig. 3-11):

$$dE_x = dE \cdot \cos\theta;\ dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cos\theta}{r^2}\, dy$$

$$dE_y = dE \cdot \operatorname{sen}\theta;\ dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda \operatorname{sen}\theta}{r^2}\, dy$$

c) El campo total $\mathbf{E}$ creado por el hilo es la suma de los campos elementales $d\mathbf{E}$ creados por las cargas dq. Calculemos E_x:

$$E_x = \int dE_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot dy}{r^2} \cdot \cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\theta}{r^2}\, dy$$

Expresando dy y r en función de θ y D: $y = D \operatorname{tg}\theta$. Al diferenciar se obtiene: $dy = \dfrac{D}{\cos^2\theta}\, d\theta$. De otra parte, $r = \dfrac{D}{\cos\theta}$. Entonces:

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\cos\theta}{D}\right)^2 \cdot \cos\theta \cdot \frac{D}{\cos^2\theta} \cdot d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 D} \int_{\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \cdot d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 D} \Big[\operatorname{sen}\theta\Big]_{\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 D} [1 - (-1)] = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 D}$$

Considere un elemento dy situado en A' simétrico de A con relación a H. El elemento de campo dE da, según el eje Y, una componente igual y opuesta a dE_y creada por A. Entonces, por razones de simetría, la componente del campo E_y es nula porque todo elemento tiene un simétrico con relación al punto H: $E_y = 0$.

d) Construyamos una superficie de Gauss que tenga la simetría del problema, es decir, un cilindro de altura h cuyo eje es el hilo que pasa por P. (Fig. 3-12.) El flujo ϕ del campo eléctrico $\mathbf{E}$ a través del cilindro de Gauss es: $\phi = \phi_1 + \phi_2$. Con ϕ_1 y ϕ_2 los flujos a través de la cara lateral y las bases del cilindro respectivamente:

$$\phi_1 = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = ES_{\text{lateral}}$$

porque, por razones de simetría, el campo es normal a la superficie y constante en todo punto de la superficie. Por otra parte, $\phi_2 = 0$, porque el campo $\mathbf{E}$ está en el plano de la base del cilindro. Entonces:

$$\phi = ES_{\text{lateral}} = 2\pi DhE$$

Según el teorema de Gauss:

$$\phi = \frac{\Sigma Q_{\text{interior}}}{\varepsilon_0}$$

La suma de las cargas interiores es: $\Sigma Q_{\text{interiores}} = \lambda h$. De donde:

$$2\pi DhE = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \quad \therefore\ E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 D}$$

Problema 3-23 Dos esferas concéntricas A y B, de centro O, de radio R_1 y R_2 ($R_1 > R_2$), dividen el espacio en tres zonas. En la zona comprendida entre las dos esferas existe una densidad uniforme ρ de carga eléctrica. En el interior de B y en el exterior de A, la densidad de carga ρ es nula. *a*) Determine el campo eléctrico E en todo punto del espacio situado a una distancia r de O. *b*) Determine el potencial $V(r)$. *c*) En el caso particular de que $R_2 = 0$, dibuje $E(r)$ y $V(r)$.

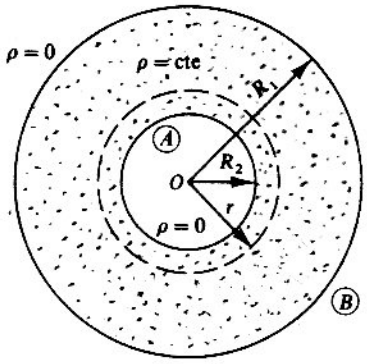


Figura 3-13

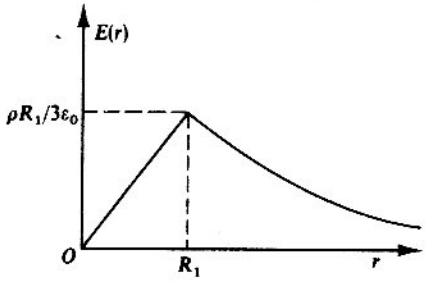


Figura 3-14

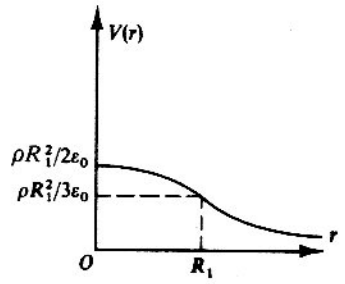


Figura 3-15

Solución. *a*) La Figura 3-13 muestra una superficie de Gauss esférica y concéntrica en A y B y de radio r. El flujo ϕ del campo eléctrico vale:

$$\Phi = \frac{\sum_i Q_i}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

donde $\sum_i Q_i$ representa la suma de las cargas eléctricas situadas en el interior de la superficie de Gauss. Como la superficie de Gauss es esférica y simétrica, E es normal y constante en todo punto de esa superficie:

$$\Phi = \int_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = ES = E \cdot 4\pi r^2 \tag{2}$$

Hay que distinguir tres casos:

1. $r < R_2$. No existe carga en el interior de la superficie de Gauss porque $\rho = 0$, de donde $\sum_i Q_i = 0$. El flujo ϕ es nulo por (1) y E es nulo según (2).

2. $R_1 > r > R_2$. Para hallar la carga total que se encuentra en el interior de la superficie de Gauss, sea dv un elemento de volumen. Entonces:

$$\sum_i Q_i = \int_v \rho \, dv$$

Como ρ es constante:

$$\sum_i Q_i = \rho \int_r dv = \rho \cdot v = \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_2^3) \quad \therefore E = \frac{\rho(r^3 - R_2^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$$

3. $r > R_1$. Entonces $Q = \frac{4}{3}\pi\rho(R_1^3 - R_2^3)$.

$$\therefore E = \frac{\rho(R_1^3 - R_2^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$$

b) Como el campo es radial, la relación que liga el campo eléctrico E al potencial V es: $E = -dV/dr$, de donde $V = -\int E dr$.

Distingamos los tres casos posibles:

1. $r < R_2$. $E = 0$, de donde $V = V_1$.

2. $R_1 > r > R_2$. $V = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int \frac{r^3 - R_2^3}{r^2} dr = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int \left(r - \frac{R_2^3}{r^2}\right) dr = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_2^3}{r}\right) + V_2$.

3. $r > R_1$. $V = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(R_1^3 - R_2^3)\int \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{R_1^3 - R_2^3}{r} + V_3$.

V_1, V_2 y V_3 son constantes de integración que hay que determinar. Haciendo la hipótesis corriente de que el potencial en el infinito es nulo, $V_\infty = 0$, se obtiene $V_3 = 0$. Para determinar V_1 y V_2, la continuidad del potencial para $r = R_1$ y $r = R_2$ da:

$$\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R_1^2}{2} + \frac{R_2^2}{R_1}\right) + V_2 \quad \therefore V_2 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}R_1^2$$

y

$$V_1 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R_2^2}{2} + R_2^2\right) + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}R_1^2 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_1^2 - R_2^2)$$

Resultados:

$$r < R_2, \qquad V = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_1^2 - R_2^2)$$

$$R_1 > r > R_2, \quad V = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_2^3}{r}\right) + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}R_1^2$$

$$r > R_1, \qquad V = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3 - R_2^3}{r}$$

c) Si $R_2 = 0$ se obtiene:

$$R_1 > r > 0, \quad E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}, \quad V = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}R_1^2$$

$$r > R_1, \qquad E = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}, \quad V = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r}$$

Las curvas representativas de $E(r)$ y $V(r)$ se dan en las Figuras 3-14 y 3-15.

Problema 3-24 Una esfera metálica de radio R y centro O se carga y después se aísla. Contiene una carga Q. *a*) Calcule el campo eléctrico en el punto M del espacio tal que $OM = \rho$. *b*) Determine ($\rho > R$) el potencial en ese punto y el potencial V de la esfera. *c*) Calcule la densidad superficial de carga en función de V y R. *d*) Se coloca sobre la parte superior de la esfera un pequeño disco metálico de masa m, de radio r y de espesor despreciable. ¿A qué potencial hay que colocar la esfera para que el disco se eleve por la acción de la presión electrostática? *e*) Aplicación numérica: $R = 1$ metro, $r = 1$ centímetro, $m = 50$ miligramos, $g = 10$ metros/segundo cuadrado. Si la esfera está a un potencial de 636 000 voltios, calcule la posición de equilibrio del disco con relación a la esfera. Se supone que la carga que lleva el disco no cambia la carga total de la esfera.

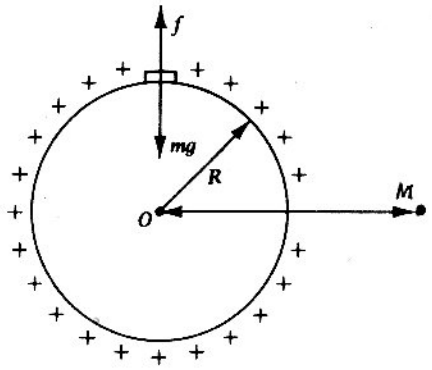


Figura 3-16

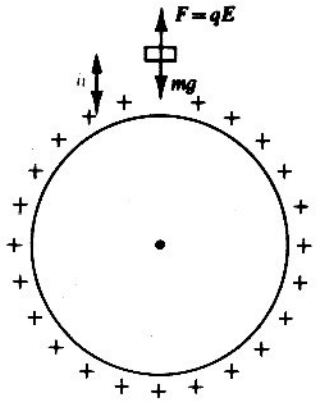


Figura 3-17

Solución. *a*) El campo eléctrico E se obtiene simplemente utilizando el teorema de Gauss. Construya en M una esfera de radio ρ y centro O. El flujo de E a través de la superficie es:

$$\phi = \int_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E \int_s ds = Es = 4\pi\rho^2 E$$

Según el teorema de Gauss:

$$\phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} \text{ si } \rho \geq R. \quad \text{De donde:} \quad 4\pi\rho^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \therefore E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\rho^2}$$

El campo eléctrico creado por una esfera cargada es el mismo que el creado por una carga puntual del mismo valor colocada en el centro de la esfera.

b) El potencial V_ρ es:

$$V_\rho = -\int E d\rho = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\rho} + \text{cte}$$

Si el potencial es nulo en infinito, la constante de integración es nula. De donde:

$$V_\rho = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\rho}$$

El potencial de la esfera es: $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$.

c) La densidad superficial de carga es $\sigma = \dfrac{dQ}{ds}$, y como es constante:

$$Q = \int_s \sigma ds = \sigma \int_s ds = \sigma s \text{ y } \sigma = \frac{Q}{s} = \frac{4\pi\varepsilon_0 RV}{4\pi R^2} = \varepsilon_0 \frac{V}{R}$$

d) La presión electrostática p es:

$$p = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{V^2}{R^2}$$

La fuerza electrostática que empuja el disco cargado es $f = p \cdot s = p \cdot \pi r^2$, de donde:

$$f = \frac{\pi\varepsilon_0 V^2}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

Para que el disco se eleve es necesario que f sea ligeramente superior a su peso. El valor mínimo es:

$$mg = \frac{\pi\varepsilon_0 V^2}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad \therefore V = \frac{R}{r}\sqrt{\frac{2mg}{\pi\varepsilon_0}}$$

Aplicación numérica:

$$V_{min} = \frac{1}{10^{-2}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 50 \cdot 10^{-6} \cdot 10}{\pi \cdot \frac{1}{36\pi \cdot 10^9}}} = 600\,000 \text{ V}$$

e) Como el potencial de la esfera V es superior a V_{min}, el disco se eleva (Fig. 3-17). Cuando cesa el contacto el disco cargado se halla en el campo eléctrico creado por la esfera y está sometido a una nueva fuerza electrostática F. La carga total que contiene el disco es:

$$q = \pi r^2 \sigma \quad \text{y} \quad F = qE = \pi r^2 \sigma \cdot \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \rho}$$

La fuerza F es:

$$F = mg, \quad \text{de donde} \quad mg = \pi r^2 \sigma \cdot \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \rho^2}$$

$$\therefore \rho^2 = \frac{\pi r^2 \sigma Q}{4\pi\varepsilon_0 mg} = \frac{r^2}{4\varepsilon_0 mg} \cdot \frac{\varepsilon_0 V}{R} \cdot 4\pi\varepsilon_0 RV$$

Aplicación numérica:

$$V = 636\,000 \text{ V}$$

$$\rho = 10^{-2} \cdot 636\,000 \sqrt{\frac{\pi}{36\pi \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 50 \cdot 10^{-6}}} = 1{,}5 \text{ m}$$

$$h = \rho - R = 0{,}5 \text{ m}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dos cargas puntuales $Q_1 = -6 \cdot 10^{-8}$ culombios y $B_2 = +15 \cdot 10^{-8}$ culombios distan 2 y 3 centímetros, respectivamente, de un punto A, y 3 y 5 centímetros de un punto B. Calcule: *a*) Los potenciales de los puntos A y B. *b*) El trabajo que realizaría una carga de $5 \cdot 10^{-12}$ culombios al pasar de A a B.

2. Dos masas eléctricas de $q = 400$ unidades c.g.s., y $q' = -600$ unidades c.g.s., están situadas a una distancia $d = 60$ centímetros. ¿Qué trabajo realiza la masa q' al desplazarse hasta una distancia $d' = 100$ centímetros de q?

CAPITULO 4

Capacitores

Capacitancia. Para cualquier conductor, aislado, cargado, la carga es proporcional a su potencial, esto es:

$$Q = CV$$

la constante de proporcionalidad C; recibe el nombre de *capacitancia* o capacidad del conductor.

Para $V = 1$ voltio, $C = Q$; C; es la carga que hay que suministrar a un conductor para que adquiera un potencial de 1 voltio.

Para $Q = 1$ culombio

$$[C] \langle\rangle \frac{1 \text{ culombio}}{1 \text{ voltio}} = 1 \text{ F}$$

$1 \text{ F} = 10^{0} \text{ F} = \text{faradio}$
$1\ \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F} = \text{microfaradio}$
$1\ \eta\text{F} = 10^{-9} \text{ F} = \text{nanofaradio}$
$1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F} = \text{picofaradio}$

La capacitancia de un conductor está ligada a la naturaleza y a la geometría de éste.

Capacitor. Es el conjunto formado por dos conductores aislados y cargados con cargas de igual magnitud y signo opuesto.

La capacitancia de un condensador, se define como la razón de la carga de cualquiera de los conductores a la diferencia de potencial entre ellos:

$$C = Q/\Delta V$$

En el proceso de carga de un condensador se consume energía en un instante en que la carga es q y se suministra una cantidad dq el trabajo necesario está dado por:

$$dW = Vdq = \frac{q}{c}\, dq, \text{ por lo tanto:}$$

$$W = \frac{1}{C}\int_0^Q qdq = \frac{1}{C}\,\frac{Q^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q\,\Delta V}{2} = \Delta\mathcal{E}$$

Esta energía almacenada por el condensador se mide en julios cuando Q se mide en culombios y C en faradios.

Capacitor plano. Se caracteriza por las siguientes condiciones:

— Placas paralelas y de área finita.
— Separación entre placas despreciable frente a las dimensiones de éstas. (Fig. 4-1.)

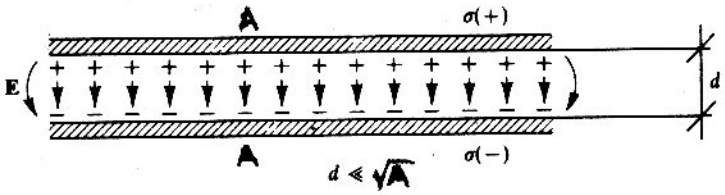


Figura 4-1

El campo entre las placas de un capacitor plano es *uniforme* excepto en el área deformada por el borde de las placas.

Despreciando la dispersión y considerando entre las placas un dieléctrico de permitividad ε:

campo eléctrico entre las placas: $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon} = \dfrac{Q}{\varepsilon \cdot A}$

campo eléctrico fuera de las armaduras: $E = 0$

$$\Delta V = E \cdot d = V_+ - V_- = \frac{\sigma}{\varepsilon} d = \frac{Q}{A\varepsilon} d$$

$$\left.\begin{aligned} Q &= \frac{A\varepsilon}{d} \cdot \Delta V \\ Q &= C \cdot \Delta V \end{aligned}\right\} \quad \frac{A\varepsilon}{d}\Delta V = C \cdot \Delta V; \quad \boxed{C = \frac{A\varepsilon}{d}} \qquad (4\text{-}1)$$

$$[\varepsilon] = \frac{[F]}{[m]}$$

En los bordes del condensador, por ser σ mayor, la capacitancia C es menor:

$$C = \frac{A \cdot \varepsilon}{d} = \frac{Q \cdot A \cdot \varepsilon}{Q \cdot d} = \frac{\varepsilon Q}{\sigma \cdot d}$$

Capacitancia de una esfera conductora. El potencial de una esfera conductora cargada con una cantidad Q de electricidad vale:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\left.\begin{aligned} C \cdot V &= Q \\ 4\pi\varepsilon_0 R \cdot V &= Q \end{aligned}\right\} \quad \boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 R} \qquad (4\text{-}2)$$

Capacitor esférico. Está constituido por dos esferas conductoras y concéntricas, separadas por un dieléctrico. (Fig. 4-2.)

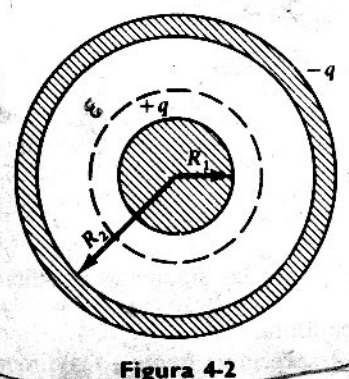


Figura 4-2

Para un caso de cargas y radios respectivos: $+q$, R_1 y $-q$, R_2, tendremos, aplicando el teorema de Gauss:

$$\iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V = -\frac{\partial V}{\partial R} \qquad dV = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{R}$$

$$V_1 - V_2 = -\int_2^1 \mathbf{E}\, d\mathbf{R} = -\int_2^1 E\, dR =$$

$$= \int_2^1 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\, dR = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_2^1 \frac{dR}{R^2} =$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{R^{-1}}{-1}\right]_2^1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R}\right]_2^1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right);$$

$$\Delta V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{4-3}$$

$$q = C \cdot \Delta V \qquad C = \frac{q}{V_1 - V_2} \qquad C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \tag{4-4}$$

Capacitor cilíndrico. Está constituido por dos cilindros conductores y concéntricos, separados por un dieléctrico. (Fig. 4-3.)

Para cargas $+q$ y $-q$ correspondientes a radios R_1 y R_2 respectivamente, tendremos por aplicación del teorema de Gauss:

$$\iint \mathbf{E}\, d\mathbf{s} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \iint E\, ds = E \iint ds = E \cdot 2\pi R l; \quad E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l \cdot R}$$

$$V_1 - V_2 = -\int_2^1 \mathbf{E}\, d\mathbf{R} = \int_1^2 E\, dR = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\int_1^2 \frac{dR}{R} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\left[\ln R\right]_1^2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1};$$

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} \qquad C = \frac{q}{\Delta V} \tag{4-5}$$

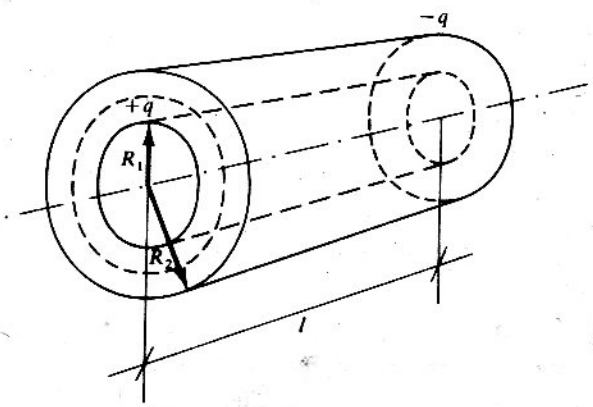


Figura 4-3

luego

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \tag{4-6}$$

Asociación de capacitores. *a*) Asociación en serie. (Fig. 4-4.)

de ahora en adelante $V_{ab_1} = \Delta V_1$

$$q_1^+ = q_2^+ = \ldots = q_n^+ = q \quad \text{— } q \text{ equivalente}$$

$$\Delta V_1 \neq \Delta V_2 \neq \ldots \neq \Delta V_n; \quad \sum_1^n \Delta V_i = \Delta V_T = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \ldots + \Delta V_n = \Delta V_{equiv.}$$

$$V_T = \sum_1^n V_i = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \ldots + \frac{q}{C_n} = q \sum_1^n \frac{1}{C_i}$$

$$\left.\begin{aligned} V_T &= q \sum_1^n \frac{1}{C_i} \\ V_T &= \frac{q}{C_T} \end{aligned}\right\} \quad \frac{1}{C_e} = \sum_1^n \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n} \tag{4-7}$$

C_e: C equivalente

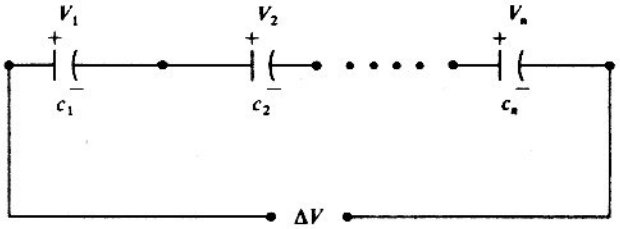


Figura 4-4

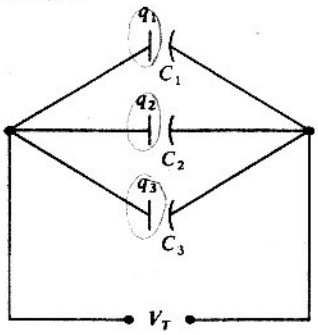


Figura 4-5

b) Asociación en paralelo. (Fig. 4-5.)

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V_3 = \ldots = \Delta V_n = \Delta V_{equivalente}$$

$$q_1 \neq q_2 \neq q_3 \neq \ldots \neq q_n; \quad q_T = \sum_1^n q_i = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n$$

donde las cargas consideradas deben ser todas de un mismo lado

$$q_T = C_1V_1 + C_2V_2 + \ldots + C_nV_n = C_1V + C_2V + \ldots + C_nV = V\sum_1^n C_i$$

$$\left.\begin{aligned} q_T &= V \sum_1^n C_i \\ q_T &= VC_T \end{aligned}\right\} \quad C_T = \sum_1^n C_i = C_1 + C_2 + \ldots + C_n \tag{4-8}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 4-1 ¿Cuál es la capacidad de un condensador que adquiere una carga de 500 microculombios cuando se conecta a una batería de 125 voltios?

Solución. $C = Q/V = \dfrac{500\ \mu C}{125\ V} = \dfrac{500 \cdot 10^{-6}\ C}{125\ V} = 4 \cdot 10^{-6}\ C/V = 4 \cdot 10^{-6}\ F = 4\ \mu F.$

Problema 4-2 Un condensador de 20 microfaradios tiene una carga de 50 microculombios. ¿Cuál es el voltaje de la batería?

Solución. $V = Q/C = \dfrac{50\ \mu C}{20\ \mu F} = \dfrac{50 \cdot 10^{-6}\ C}{20 \cdot 10^{-6}\ F} = 2{,}5\ C/F = 2{,}5\ \dfrac{C}{C/V} = 2{,}5\ V.$

Problema 4-3 ¿Cuánta energía se almacena en un condensador si la carga en una de sus placas es de 500 microculombios cuando la diferencia de potencial es de 100 voltios?

Solución. Empleando la fórmula: energía $= (1/2)QV$ y convirtiendo los voltios a julios/culombio se obtiene:

$$\text{energía} = (1/2)QV = (1/2) \cdot 500 \cdot 10^{-6}\ C \cdot 100\ J/C = 0{,}025\ J$$

Problema 4-4 Un condensador almacena $5 \cdot 10^{-5}$ julios cuando se conecta a una batería de 110 voltios. ¿Cuál es la capacidad del condensador y cuál es la carga en una de sus placas?

Solución. Energía $= (1/2)QV$, $C = 2 \cdot \text{energía}/V^2 = 2 \cdot 5 \cdot 10^{-5}\ J/(110\ V)^2$

$$C = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-5}\ J}{(110\ J/C)^2} = 8{,}3 \cdot 10^{-9}\ C^2/J = 8{,}3 \cdot 10^{-9}\ F = 8{,}3 \cdot 10^{-3}\ \mu F$$

Para hallar la carga sobre sus placas, energía $= (1/2)QV$; por tanto, $Q = 2 \cdot \text{energía}/V$:

$$Q = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-5}\ J}{110\ V} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-5}\ J}{110\ J/C} = 9{,}09 \cdot 10^{-7}\ C$$

Problema 4-5 Un condensador está formado por dos láminas paralelas de 0,5 metros cuadrados de área y separadas 0,1 milímetro en aceite cuya permitividad absoluta es $2{,}3 \cdot 10^{-10}\ C^2/N \cdot m^2$. Cuando el condensador se conecta a una fuente de 300 voltios, ¿cuánta energía almacena? ¿Cuál es su carga?

Solución. Para hallar la energía almacenada se puede emplear la fórmula: energía $= (1/2)CV^2$. Sin embargo, se debe hallar primero la capacidad. La capacidad del condensador de láminas paralelas es:

$$C = \frac{\varepsilon A}{d} = \frac{(2{,}3 \cdot 10^{-10}\ C^2/N \cdot m^2)(0{,}5\ m^2)}{1 \cdot 10^{-4}\ m} = 115 \cdot 10^{-8}\ C^2/N \cdot m = 115 \cdot 10^{-8}\ C^2/J = 115 \cdot 10^{-8}\ F$$

Entonces:

$$\text{energía} = (1/2)CV^2 = 1/2 \cdot (115 \cdot 10^{-8}\ C^2/J)(300\ V)^2$$

Cambiando voltios a julios/culombio:

$$\text{energía} = 1/2 \cdot (115 \cdot 10^{-8}\ C^2/J)(300\ J/C)^2 = 517{,}5 \cdot 10^{-4}\ J$$

Para hallar la carga sobre una de las placas, como la energía $= (1/2)QV$,

$$Q = 2 \cdot \text{energía}/V = \frac{2 \cdot 517{,}5 \cdot 10^{-4}\ J}{300\ J/C} = 345 \cdot 10^{-6}\ C = 345\ \mu C$$

Problema 4-6 Tres condensadores de 6, 8 y 24 microfaradios, respectivamente, se conectan en serie a una batería con una fuerza electromotriz de 6 voltios. Halle: *a*) la capacidad total del circuito; *b*) la carga en cada condensador; *c*) la caída de potencial en cada condensador; *d*) la energía total almacenada en el circuito; *e*) la energía almacenada en cada condensador.

Solución. *a*) La capacidad del grupo de condensadores en serie es:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad \therefore \frac{1}{C} = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{4}{24} + \frac{3}{24} + \frac{1}{24} = \frac{8}{24} \quad \therefore C = 3\ \mu\text{F}$$

b) Como los condensadores están conectados en serie, la carga en cada uno es la misma que la de todo el circuito. La carga en todo el circuito es de:

$$Q = CV = 3\ \mu\text{F} \cdot 6\ \text{V} = 3 \cdot 10^{-6}\ \text{F} \cdot 6\ \text{J/C} = 3 \cdot 10^{-6}\ \text{C}^2/\text{J} \cdot 6\ \text{J/C} = 18 \cdot 10^{-6}\ \text{C} = Q_1 = Q_2 = Q_3$$

c) La caída de potencial en cada condensador se puede calcular a partir de la fórmula: $V = Q/C$ para cada condensador.

Para C_1, $V = Q_1/C_1 = \dfrac{18 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{6\ \mu\text{F}} = \dfrac{18 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{6 \cdot 10^{-6}\ \text{F}} = \dfrac{18 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{6 \cdot 10^{-6}\ \text{C}^2/\text{J}} = 3\ \text{J/C} = 3\ \text{V}.$

Para C_2, $V = Q_2/C_2 = \dfrac{18 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{8\ \mu\text{F}} = \dfrac{18 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{8 \cdot 10^{-6}\ \text{F}} = \dfrac{18 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{8 \cdot 10^{-6}\ \text{C}^2/\text{J}} = 2{,}25\ \text{J/C} = 2{,}25\ \text{V}.$

Para C_3, $V = Q_3/C_3 = \dfrac{18 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{24\ \mu\text{F}} = \dfrac{18 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{24 \cdot 10^{-6}\ \text{F}} = \dfrac{18 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{24 \cdot 10^{-6}\ \text{C}^2/\text{J}} = 0{,}75\ \text{J/C} = 0{,}75\ \text{V}.$

Entonces la caída total del potencial es: 3 V + 2,25 V + 0,75 V = a la fuerza electromotriz de la batería.

d) La energía total almacenada en el circuito es = $(1/2)QV = 1/2 \cdot (18 \cdot 10^{-6}\ \text{C})(6\ \text{V}) = 1{,}2 \cdot (18 \cdot 10^{-6}\ \text{C}) \cdot (6\ \text{J/C}) = 54 \cdot 10^{-6}\ \text{J}$.

e) La energía en cada condensador se puede hallar por medio de la misma relación, siendo V la caída de potencial en cada condensador de carga Q.

Para C_1, energía = $(1/2)QV = 1/2 \cdot (18 \cdot 10^{-6}\ \text{C})(3\ \text{V}) = 1/2 \cdot (18 \cdot 10^{-6}\ \text{C})(3\ \text{J/C}) = 27 \cdot 10^{-6}\ \text{J}$.
Para C_2, energía = $(1/2)QV = 1/2 \cdot (18 \cdot 10^{-6}\ \text{C})(2{,}25\ \text{V}) = 1/2 \cdot (18 \cdot 10^{-6}\ \text{C})(3\ \text{J/C}) = 20{,}25 \cdot 10^{-6}\ \text{J}$.
Para C_3, energía = $(1/2)QV = 1/2 \cdot (18 \cdot 10^{-6}\ \text{C})(0{,}75\ \text{V}) = 1/2 \cdot (18 \cdot 10^{-6}\ \text{V})(0{,}75\ \text{J/C}) = 6{,}75 \cdot 10^{-6}\ \text{J}$.

Problema 4-7 Tres condensadores de capacidades de 10, 30 y 60 microfaradios se conectan en paralelo a una batería con una fuerza electromotriz de 100 voltios. Halle: *a*) la capacidad total del circuito; *b*) la caída de potencial en cada condensador; *c*) la carga en cada condensador; *d*) la carga total en el circuito; *e*) la energía almacenada en el circuito; *f*) la energía almacenada en cada condensador.

Solución. *a*) Como los condensadores están conectados en paralelo, la capacidad total es la suma de las capacidades individuales.

$$C = C_1 + C_2 + C_3 = 10 + 30 + 60 = 100\ \mu\text{F}$$

b) Como los condensadores están conectados en paralelo, la caída de potencial es la misma, es decir, la de la batería: $100\ \text{V} = V_1 = V_2 = V_3$.

c) Para hallar la carga en cada condensador se emplea la fórmula $Q = CV$, siendo C la capacidad de cada condensador cuya caída de potencial es V.

Para C_1, $Q_1 = C_1V_1 = 10\ \mu\text{F} \cdot 100\ \text{V} = 10 \cdot 10^{-6}\ \text{F} \cdot 100\ \text{V} = 10 \cdot 10^{-6}\ \text{C}^2/\text{J} \cdot 100\ \text{J/C} = 10^{-3}\ \text{C}$.
Para C_2, $Q_2 = C_2V_2 = 30\ \mu\text{F} \cdot 100\ \text{V} = 30 \cdot 10^{-6}\ \text{F} \cdot 100\ \text{V} = 30 \cdot 10^{-6}\ \text{C}^2/\text{J} \cdot 100\ \text{J/C} = 3 \cdot 10^{-3}\ \text{C}$.
Para C_3, $Q_3 = C_3V_3 = 60\ \mu\text{F} \cdot 100\ \text{V} = 60 \cdot 10^{-6}\ \text{F} \cdot 100\ \text{V} = 60 \cdot 10^{-6}\ \text{C}^2/\text{J} \cdot 100\ \text{J/C} = 6 \cdot 10^{-3}\ \text{C}$.

d) La carga total sobre el circuito, en paralelo, es la suma de las cargas individuales: por tanto, $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 10^{-3}\ \text{C} + 3 \cdot 10^{-3}\ \text{C} + 6 \cdot 10^{-3}\ \text{C} = 10^{-2}\ \text{C}$.

e) La energía total almacenada en el circuito = $(1/2)QV = 1/2(10^{-2}\ \text{C})(100\ \text{V}) = 1/2(10^{-2}\ \text{C})(100\ \text{J/C}) =$ = 0,5 J.

f) La energía almacenada en cada condensador se puede hallar por el mismo método, siendo Q la carga del condensador cuya caída de potencial es V.

Para C_1, energía = $(1/2)Q_1V = 1/2 \cdot (10^{-3}\ \text{C})(100\ \text{V}) = 1/2 \cdot (10^{-3}\ \text{C})(100\ \text{J/C}) = 0{,}05\ \text{J}$.
Para C_2, energía = $(1/2)Q_2V = 1/2 \cdot (3 \cdot 10^{-3}\ \text{C})(100\ \text{V}) = 1/2 \cdot (3 \cdot 10^{-3}\ \text{C})(100\ \text{J/C}) = 0{,}15\ \text{J}$.
Para C_3, energía = $(1/2)Q_3V = 1/2 \cdot (6 \cdot 10^{-3}\ \text{C})(100\ \text{V}) = 1/2 \cdot (6 \cdot 10^{-3}\ \text{C})(100\ \text{J/C}) = 0{,}3\ \text{J}$.

Problema 4-8 Entre las láminas de un condensador plano que se hallan a la distancia $d = 1$ centímetro una de otra se aplica una diferencia de potencial $U = 300$ voltios. En el espacio entre las dos láminas se introduce una placa de vidrio de caras planas y paralelas con espesor $d_1 = 0{,}5$ centímetros y una lámina de parafina del mismo tipo con espesor $d_2 = 0{,}5$ centímetros. Las constantes dieléctricas (o permitividades relativas) del vidrio y de la parafina son 6 y 2, respectivamente. Halle: *a*) la intensidad del campo eléctrico en cada capa; *b*) la caída de potencial en cada capa; *c*) la capacidad del condensador, si la superficie de las láminas es $S = 100$ centímetros cuadrados, y *d*) la densidad superficial de carga de las láminas.

Solución. *a*) Llamemos E_1 y E_2 a las intensidades del campo eléctrico en cada capa y U_1 y U_2 a la caída de potencial en cada capa; entonces, siendo K_1 y K_2 las constantes dieléctricas del vidrio y la parafina, respectivamente.

$$K_1E_1 = K_2E_2$$
$$U_1 + U_2 = U$$

de donde $E_1d_1 + E_2d_2 = U$ $\left(\text{puesto que } \frac{dU}{dx} = -E\right)$. Con

$$\left.\begin{array}{l} K_1E_1 = K_2E_2 \\ E_1d_1 + E_2d_2 = U \end{array}\right| \begin{array}{l} E_1 = \dfrac{UK_2}{K_1d_2 + K_2d_1} \\ E_2 = \dfrac{K_1E_1}{K_2} \end{array}$$

$$E_1 = \frac{3 \cdot 10^2\ (\text{V})}{6 \cdot 5 \cdot 10^{-3}\ (\text{m}) + 2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}\ (\text{m})} = 1{,}5 \cdot 10^4\ (\text{V m}); \quad E_2 = \frac{6}{2}\ 1{,}5 \cdot 10^4\ (\text{V/m}) = 4{,}5 \cdot 10^4\ (\text{V m})$$

b) $U_1 = E_1d_1 = 1{,}5 \cdot 10^4\ (\text{V m}) \cdot 5 \cdot 10^{-3}\ \text{m} = 75\ (\text{V})$.
$U_2 = E_2d_2 = 4{,}5 \cdot 10^4\ (\text{V m}) \cdot 5 \cdot 10^{-3}\ \text{m} = 225\ (\text{V})$.

c) $C_1 = \dfrac{\varepsilon_0K_1S}{d_1}$ y $C_2 = \dfrac{\varepsilon_0K_2S}{d_2}$, de donde,

$$C = \frac{\varepsilon_0K_1K_2S}{d_1K_2 + d_2K_1} = \frac{\varepsilon_0S}{d_1/K_1 + d_2/K_2} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12}\ (\text{C}^2/\text{N-m}^2) \cdot 10^2 \cdot 10^{-4}\ (\text{m}^2)}{\frac{5 \cdot 10^{-3}}{6}\ \text{m} + \frac{5 \cdot 10^{-3}}{2}\ \text{m}} = 2{,}655 \cdot 10^{-11}\ \text{F}$$

d) La carga de una de las láminas es $q = \sigma S = C_1U_1 = C_2U_2 = CU$, de donde

$$\sigma = \frac{CU}{S} = 8 \cdot 10^{-7}\ \text{C/m}^2$$

Problema 4-9 El radio del conductor central de un cable coaxial es de 1,5 centímetros, el del condensador cilíndrico concéntrico a él, de 3,5 centímetros. Entre el conductor central y el cilíndrico se aplica una diferencia de potencial de 2300 voltios. Calcule la intensidad del campo eléctrico a la distancia de 2 centímetros del eje del cable.

Solución. $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon x}$, donde λ es la carga por unidad de longitud del cable y x la distancia hasta el eje del cable. La magnitud λ se halla de las siguientes relaciones:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon L}{\ln \dfrac{R}{r}} = \frac{q}{U_0} = \frac{\lambda L}{U_0} \quad \therefore \lambda = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon U_0}{\ln \dfrac{R}{r}}$$

donde U_0 es la diferencia de potencial entre el conductor central y el cilíndrico. Por tanto, la intensidad del campo será $E = \dfrac{U_0}{x \ln \dfrac{R}{r}}$. Al remplazar los valores numéricos se encuentra que: $E = 136$ kV/m.

Problema 4-10 En un condensador cilíndrico, con dieléctrico de aire, el radio del cilindro interior es $r = 1{,}5$ centímetros y el del exterior, $R = 3{,}5$ centímetros. Entre los cilindros se aplica una diferencia de potencial $U = 23\,000$ voltios. ¿Qué velocidad adquiere un electrón, bajo la acción del campo de este condensador, al desplazarse desde la distancia $l_1 = 2{,}5$ centímetros hasta la $l_2 = 2$ centímetros del eje del cilindro?

Solución. El trabajo de las fuerzas del campo eléctrico se transforma en energía cinética del electrón $\mathcal{E}_c = \frac{mv^2}{2}$. Pero $d\mathcal{E}_c = qdU = -qEdx$. Como $E = \frac{U_0}{x \ln \frac{R}{r}}$, se tiene que:

$$\mathcal{E}_c = -\int_{l_1}^{l_2} \frac{qU_0 dx}{x \ln \frac{R}{r}} = \frac{qU_0 \ln \frac{l_1}{l_2}}{\ln \frac{R}{r}} = \frac{mv^2}{2}$$

de donde:

$$v = \sqrt{\frac{2qU_0 \ln \frac{l_1}{l_2}}{m \ln \frac{R}{r}}}$$

Remplazando los valores numéricos se obtiene que $v = 4{,}61 \cdot 10^7$ m/seg.

Problema 4-11 Un condensador cilíndrico consta de un cilindro interior de radio $r = 3$ milímetros, dos capas de material aislante y un cilindro exterior de radio $R = 1$ centímetro. La primera capa del material aislante, cuyo espesor es de $d_1 = 3$ milímetros, está en contacto con el cilindro interior. Halle la relación de las caídas de potencial en estas capas.

Solución. En el interior del condensador cilíndrico la intensidad del campo es $E = \frac{U_0}{x \ln \frac{R}{r}}$. Por tanto, la caída de potencial en la primera capa será:

$$U_1 = -\int_{r+d_1}^{r} E\,dx = -\int_{r+d_1}^{r} \frac{U_0}{x \ln \frac{R}{r}} dx = \frac{U_0 \ln \frac{r+d_1}{r}}{\ln \frac{R}{r}}$$

La caída de potencial en la segunda capa será:

$$U_2 = \frac{U_0 \ln \frac{R}{r+d_1}}{\ln \frac{R}{r}} \quad \text{de donde:} \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{\ln \frac{r+d_1}{r}}{\ln \frac{R}{r+d_1}} = 1{,}35$$

Problema 4-12 Las dos láminas de un condensador están cargadas con cargas opuestas y separadas por un dieléctrico de 5 milímetros. La cantidad de carga por unidad de área es igual en las dos láminas. El coeficiente del dieléctrico es 3. El campo eléctrico resultante en el dieléctrico es de 10 voltios/metro. Halle: *a*) la carga libre por unidad de superficie de las láminas; *b*) la carga inducida por unidad de área sobre las superficies del dieléctrico.

Solución. *a*) Aplicando la ecuación $E = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma - \sigma_i)$, con σ la carga libre por unidad de superficie de las láminas y σ_i la carga inducida por unidad de superficie del dieléctrico. También se tiene que $\sigma - \sigma_i = \frac{\sigma}{K}$, con $K = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$.

De las dos expresiones anteriores se obtiene: $\sigma - \sigma_i = E\varepsilon_0 = \frac{\sigma}{K}$, entonces:

$$\sigma = KE\varepsilon_0 = 3 \cdot 10 \text{ V/m} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2 = 26{,}55 \cdot 10^{-11} \text{ C/m}^2$$

b) La carga inducida:

$$\sigma_i = \sigma - E\varepsilon_0 = 26{,}55 \cdot 10^{-11} \text{ C/m}^2 - 10 \text{ V/m} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2 = 17{,}60 \cdot 10^{-11} \text{ C/m}^2$$

que es la carga inducida por unidad de superficie sobre la superficie del dieléctrico.

Problema 4-13 *a*) El espacio entre dos láminas paralelas de un condensador se llena con un dieléctrico de coeficiente 2,5 y de intensidad 10^6 voltios/metro. Las láminas están separadas 2 milímetros. ¿Cuál es el voltaje máximo que se puede aplicar entre las dos láminas? ¿Qué área de las láminas dan una capacidad de 10^{-3} microfaradios? A un voltaje máximo, ¿cuáles son las cargas libres y ligadas por unidad de área de las láminas y de la superficie del dieléctrico?

b) 1. Si el condensador es de aire y tiene una capacidad de 10^{-9} faradios y la carga de cada lámina de 1 microculombio, halle la diferencia de potencial entre las mismas. 2. Al mantener constante la carga, ¿cuál será la diferencia de potencial entre ellas si se duplica la distancia que las separa? 3. ¿Qué trabajo hay que hacer para duplicar la distancia entre ellas?

Solución. *a*) Si la intensidad del dieléctrico es de 10^6 V/m, la intensidad eléctrica E no debe exceder este valor. Entonces el voltaje máximo es:

$$V_{max} = E_{max}\, d = 10^6 \text{ V/m} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 2 \cdot 10^3 \text{ V}$$

La capacidad del condensador con dieléctrico entre las láminas está dada por:

$$C = K\varepsilon_0(A/d) \quad \therefore A = \frac{Cd}{K\varepsilon_0} = \frac{10^{-9} \text{ F} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{2{,}5 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2} = 0{,}09 \text{ m}^2$$

La densidad de carga libre sobre las láminas del condensador está dada por:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{K\varepsilon_0} \quad \therefore \sigma = EK\varepsilon_0 = 10^6 \text{ V/m} \cdot 2{,}5 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2 = 22{,}1 \ \mu\text{C/m}^2$$

La densidad de carga ligada sobre la superficie del dieléctrico es:

$$\sigma_b = x\varepsilon_0 E = (K-1)\varepsilon_0 \frac{\sigma}{K\varepsilon_0} = \sigma \frac{K-1}{K} = 22{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1{,}5}{2{,}5} = 13{,}26 \ \mu\text{C/m}^2$$

b) 1. La diferencia de potencial entre las láminas es $V_{ab} = q/C = 10^{-6}/10^{-9} = 10^3$ V.

2. Si se duplica la distancia entre las láminas del condensador se reduce a la mitad la capacidad: $C = 10^{-9}/2 = 5 \cdot 10^{-10}$ F y, por consiguiente, la diferencia de potencial es: $V'_{ab} = q/C = 10^{-6}/5 \cdot 10^{-10} = 2 \cdot 10^3$ V.

3. El trabajo para duplicar la distancia es:

$$T = q\frac{V'_{ab} - V_{ab}}{2} = 10^{-6}\frac{2 \cdot 10^3 - 10^3}{2} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

Problema 4-14 Un condensador de 10 microfaradios está cargado a una diferencia de potencial de 500 voltios. Si las armaduras se conectan en paralelo a las de un condensador descargado de 3 microfaradios, calcule: *a*) la carga inicial del sistema; *b*) la diferencia de potencial entre las armaduras de cada condensador; *c*) la energía final del sistema; *d*) la disminución de energía cuando se desconectan los condensadores; *e*) si el condensador se carga hasta que la diferencia de potencial entre las láminas sea de 50 voltios y si la carga la comparte

con un segundo condensador con aire como dieléctrico, la diferencia de potencial cae a 20 voltios. El experimento se repite con un dieléctrico entre las láminas del segundo condensador y en este caso la diferencia de potencial es de 10 voltios. ¿Cuál es el coeficiente dieléctrico del dieléctrico empleado? (Vea Fig. 4-6.)

Solución. *a*) La carga inicial del sistema es:

$$q = C_1 V_{ab} = 10^{-5}\ \text{F} \cdot 500\ \text{V} = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{C}$$

que es la del condensador cargado.

b) Por estar los condensadores conectados en paralelo, la capacidad es la suma de las capacidades individuales:

$$C = C_1 + C_2 = 10 \cdot 10^{-6}\ \text{F} + 3 \cdot 10^{-6}\ \text{F} = 13 \cdot 10^{-6}\ \text{F}$$

y, por tanto, la diferencia de potencial entre las armaduras de cada condensador es:

$$V' = \frac{q}{C} = \frac{5 \cdot 10^{-3}\ \text{C}}{13 \cdot 10^{-6}\ \text{F}} = \frac{5}{13} \cdot 10^{3}\ \text{V}$$

c) La energía final del sistema es:

$$W_f = \frac{1}{2} q \cdot V' = \frac{1}{2}(5 \cdot 10^{-3}\ \text{C}) \cdot \frac{5}{13} \cdot 10^{3}\ \text{V} = \frac{25}{26}\ \text{J}$$

d) La energía inicial del sistema era:

$$W_i = \frac{1}{2} q \cdot V = \frac{1}{2}(5 \cdot 10^{-3}\ \text{C})\ 500\ \text{V} = \frac{25}{2}\ 10^{-1}\ \text{J}$$

Por tanto, la disminución de energía cuando se conectan los condensadores es:

$$W_i - W_f = \frac{25}{2}\ 10^{-1}\ \text{J} - \frac{25}{26}\ \text{J} = 1.25\ \text{J} - 0.96\ \text{J} = 0.29\ \text{J}$$

e) La carga que posee inicialmente el primer condensador es:

$$q = C_1 V_1 = 10^{-5}\ \text{F} \cdot 50\ \text{V} = 5 \cdot 10^{-4}\ \text{C}$$

Esta carga se comparte con el segundo condensador C_2: no hay pérdida de carga. Entonces:

$$q = (C_1 + C_2)V_2 \quad \therefore\ C_2 = \frac{q}{V_2} - C_1 = \frac{5 \cdot 10^{-4}\ \text{C}}{20\ \text{V}} - 10^{-5}\ \text{F} = \frac{5}{2} \cdot 10^{-5}\ \text{F} - 10^{-5}\ \text{F} = \frac{3}{2} \cdot 10^{-5}\ \text{F}$$

Si un dieléctrico de coeficiente K se coloca entre las láminas del condensador C_2 y el experimento se repite, $q = (C_1 + C_2 K)V_3$.

$$\therefore\ K = \frac{1}{C_2}\left(\frac{q}{V_3} - C_1\right) = \frac{2}{3 \cdot 10^{-5}\ \text{F}}\left(\frac{5 \cdot 10^{-4}\ \text{C}}{10\ \text{V}} - 10^{-5}\ \text{F}\right) = \frac{2}{3 \cdot 10^{-5}\ \text{F}} - 4 \cdot 10^{-5}\ \text{F} = \frac{8}{3}$$

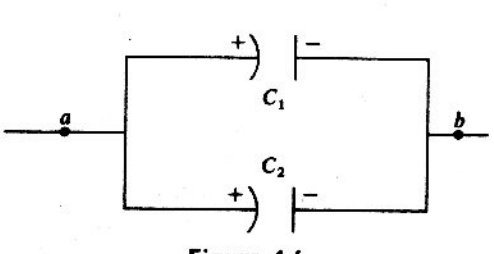


Figura 4-6

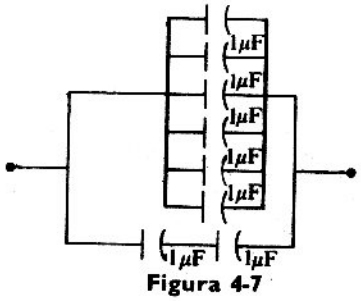


Figura 4-7

Problema 4-15 Siete condensadores de 1 microfaradio de capacidad cada uno se conectan para que produzcan una capacidad de $\frac{11}{2}$ microfaradios. ¿Cómo se deben conectar? (Vea Fig. 4-7.)

Solución. Suponga n-condensadores en paralelo y $(7\text{-}n)$ en serie. Las capacidades de los conjuntos son:

$$C_p = \sum_{i=1}^{n} C_i = \sum_{1}^{n} 1\,\mu f = n\,\mu F$$

$$\frac{1}{C_s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} = \sum_{1}^{7\text{-}n} \frac{1}{1\mu f} = (7\text{-}n)\,\mu F^{-1} \;\therefore\; C_s = \frac{1}{7\text{-}n}\,\mu F.$$

Si C_p y C_s se conectan en paralelo entonces

$$C_t = C_p + C_s = \left(n + \frac{1}{7\text{-}n}\right)\mu f \;\therefore\; n + \frac{1}{7\text{-}n} = \frac{11}{2},$$

luego: $2\,n\,(7\text{-}n) + 2 = 11\,(7\text{-}n);\; 2n^2 - 25n + 75 = 0$ de aquí tomando la solución entera $n = 5$.

Si C_p y C_s se conectan en serie, entonces

$$\frac{1}{C_t} = \frac{1}{C_p} + \frac{1}{C_s} = \frac{1}{n} + 7\text{-}n = \frac{2}{11} \;\therefore\; 11 + 77\,n - 11\,n^2, =$$

$2\,n$, luego: $11\,n^2 - 75\,n - 11 = 0$ ecuación que no tiene soluciones enteras. Entonces la capacidad pedida se obtiene si 5 condensadores se conectan en paralelo y la combinación en paralelo con los otros dos conectados en serie.

Problema 4-16 Dos conductores esféricos de 3 centímetros de radio y separados están conectados por un alambre y cargados a un potencial de 50 voltios. Una esfera hueca y conductora de 4 centímetros de radio se divide en dos hemisferios y se coloca concéntricamente alrededor de una de las esferas y a tierra, formando así un condensador esférico. El alambre que une las dos esferas pasa por un hueco de uno de los hemisferios. Halle el potencial final de los dos conductores.

Solución. El potencial que existe entre dos hemisferios conductores (el interior de radio a y cargado y el exterior de radio b y conectado a tierra) es:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)$$

El potencial de la esfera interior, con $r = a$, es:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Antes de conectar la esfera que está unida a tierra, cada esfera tiene una carga tal que $V = q/4\pi\varepsilon_0 a$.

$$\therefore\; q = 4\pi\varepsilon_0 Va = \frac{0.03\ \text{m} \cdot 50\ \text{V}}{9 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}} = \frac{10^{-9}}{6}\ \text{C}$$

La carga total sobre los dos conductores es de $\frac{1}{3}\,10^{-9}$ C, porque el alambre que las une hace que se conserven al mismo potencial. Cuando se fija la esfera conectada a tierra la carga fluye de una esfera a la otra para conservar el potencial constante. Las cargas q_1 y q_2 quedan sobre las esferas para las cuales:

$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a} = V_0 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

con $q_1 + q_2 = \frac{1}{3} \cdot 10^{-9}$ C. Entonces:

$$\frac{\frac{1}{3} \cdot 10^{-9}\text{ C} - q_2}{a} = q_2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \quad \therefore q_2 = \frac{\frac{1}{3} \cdot 10^{-6}\text{ C}}{2 - \frac{a}{b}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 10^{-9}\text{ C}}{2 - \frac{3}{4}} = \frac{4}{15} \cdot 10^{-9}\text{ C}$$

$$\therefore q_1 = \frac{1}{15} \cdot 10^{-9}\text{ C} \quad \therefore V_0 = \frac{\frac{1}{15} \cdot 10^{-9}\text{ C}}{0{,}03\text{ m}} \cdot 9 \cdot 10^9\text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 = 20\text{ V}$$

Problema 4-17 Halle la capacitancia equivalente del circuito en la Figura 4-8 y la carga sobre el circuito.

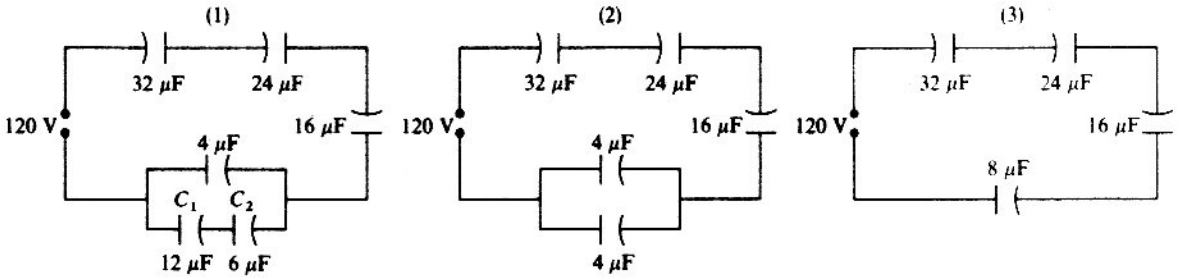


Figura 4-8

Solución. Haciéndolo por partes:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} \quad \therefore C = 4\ \mu\text{F}$$

La Figura (2) muestra la capacitancia equivalente del circuito. Las capacitancias de 4 μF están en paralelo y, por tanto,

$$C = 4\ \mu\text{F} + 4\ \mu\text{F} = 8\ \mu\text{F}$$

El circuito equivalente se transforma en un circuito en serie, como lo muestra la Figura (3). Entonces:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{24} + \frac{1}{32} = \frac{25}{96} \quad \therefore C = 3{,}84\ \mu\text{F}$$

La carga sobre el circuito es: $Q = CV = 3{,}84 \cdot 10^{-6} \cdot 120 = 460{,}8\ \mu\text{C}$.

Problema 4-18 Halle: *a*) la capacitancia equivalente de la Figura 4-9; *b*) la carga del condensador equivalente; *c*) la carga en cada condensador; *d*) el voltaje en cada condensador; *e*) la energía que se necesita para cargar cada condensador; *f*) la energía total.

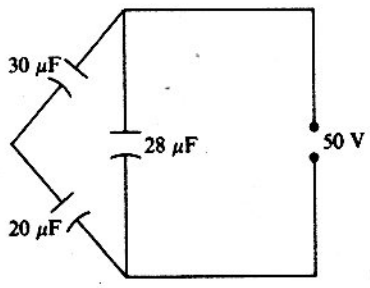


Figura 4-9

Solución. *a*) El condensador equivalente para la combinación en serie es:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{30} + \frac{1}{20} = \frac{1}{12} \quad \therefore C = 12\ \mu F$$

La capacitancia equivalente para el sistema:

$$C_s = 12 + 28 = 40\ \mu F$$

b) La carga en la capacitancia equivalente:

$$Q_s = C_s V = 40 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = 2000 \cdot 10^{-6}\ C$$

La carga de los condensadores en serie es igual a la carga sobre los condensadores en paralelo y es igual a la suma de las cargas individuales.

c) Los voltajes en los condensadores de 12 μF y 28 μF son iguales. Entonces, la carga sobre el condensador de 28 μF es:

$$Q' = CV = 28 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = 1400 \cdot 10^{-6}\ C$$

y la carga sobre el condensador equivalente de 12 μF es:

$$Q'' = CV = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = 600 \cdot 10^{-6}\ C$$

En paralelo: $Q' + Q'' = 2000 \cdot 10^{-6}$ C.

d) El voltaje total de los condensadores en serie es la suma de los voltajes separados. La carga en cada condensador es la misma. Así,

$$V_{20} = Q''/C = \frac{600 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^{-6}} = 30\ V; \quad V_{30} = Q''/C = \frac{600 \cdot 10^{-6}}{30 \cdot 10^{-6}} = 20\ V$$

La suma de los voltajes es: $V_t = 30 + 20 = 50$ V.

e) La energía que se necesita para cargar cada condensador es:

$$W_{20} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10^{-6} \cdot (30)^2 = 0{,}009\ J$$

$$W_{30} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 10^{-6} \cdot (20)^2 = 0{,}006\ J$$

$$W_{28} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 10^{-6} \cdot (50)^2 = 0{,}035\ J$$

f) La energía total: $W_t = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 10^{-6} \cdot (50)^2 = 0{,}05$ J.

Problema 4-19 Dos esferas de metal de igual radio se colocan de tal manera que la distancia entre sus centros es mayor que sus radios. ¿Cuál es la capacidad del sistema formado por estas dos esferas?

Solución. Si las esferas están lo suficientemente separadas podemos considerar que la presencia de una esfera no afecta la carga y el potencial de la otra. Si las esferas se cargan con cargas iguales y de signo contrario, $+q$ y $-q$, y si están en el aire, el potencial de la primera esfera es $V_1 = q/r$ y su capacidad $C = q/V_1 = r$. El potencial de la segunda esfera $V_2 = -q/r$ y su capacidad también es igual a r. La diferencia de potencial $V_1 - V_2 = q/r + q/r = 2q/r$ y, por tanto, la capacidad del sistema de las dos esferas es $C = q/(V_1 - V_2) = qr/2q = \frac{1}{2} r$, es decir, la capacidad del sistema es la mitad de la capacidad de una de las esferas aislada.

Problema 4-20 Halle la capacitancia equivalente que se da en la Figura 4-10(a).

Solución. Los pasos sucesivos de reducción se muestran en las Figuras (b) a (e). Observe que las combinaciones en paralelo y serie se reducen sucesivamente hasta que se obtiene una única capacitancia.

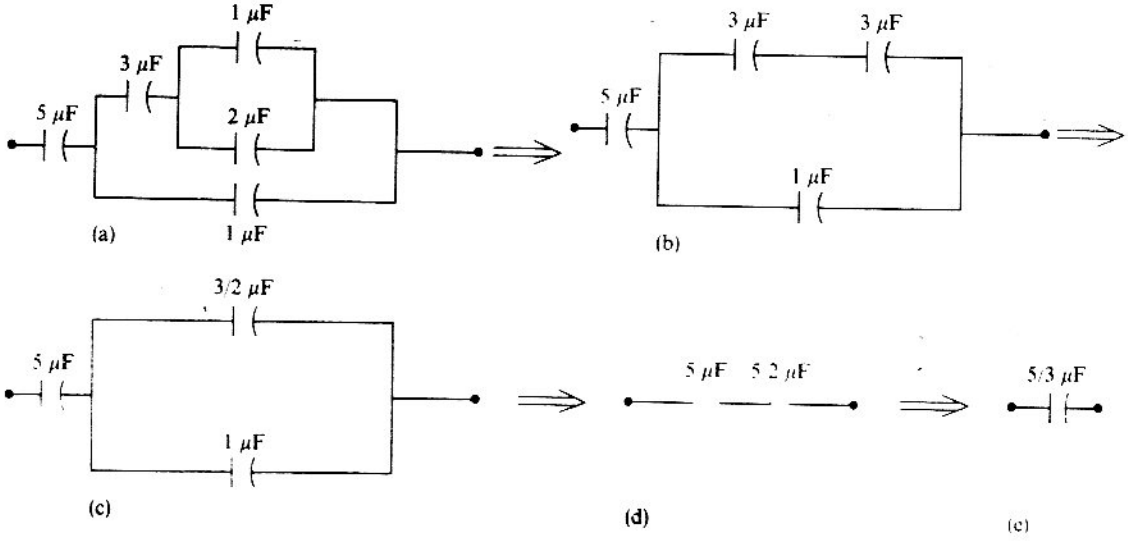


Figura 4-10

Problema 4-21 Dos placas metálicas circulares y paralelas de superficie S forman un condensador plano de espesor d. B se pone a un potencial $V > 0$ y A se deja a un potencial nulo y como punto de referencia. Las dos placas están en el vacío. *a*) Dé la capacidad del condensador. *b*) Si el condensador contiene una carga Q, calcule el potencial V. *c*) Calcule la magnitud, sentido y dirección del campo eléctrico en función de V y d sobre el eje OX de las láminas. *d*) En el centro O de A existe una pequeña abertura que permite introducir en el condensador partículas cargadas. Un electrón de carga $-q(q > 0)$ parte de O en el instante $t = 0$ con una velocidad nula y se desplaza sobre el eje X. 1) Determine, utilizando el principio fundamental de la dinámica, la ecuación diferencial del movimiento. Deduzca la ecuación horaria. 2) Calcule su velocidad cuando llega a O' centro de B. *e*) Se coloca entre A y B una malla C de las mismas dimensiones de A y B, y a un potencial $V' < 0$. 1) Calcule los campos eléctricos $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ que existen entre A y C, B y C (sentido, magnitud y dirección). 2) Un electrón parte de O con una velocidad v_0 en el instante $t = 0$: describa el movimiento del electrón; dé las ecuaciones diferenciales y horaria del electrón entre A y C. Determine el potencial V'_{min} para que el electrón no pase por la malla C.

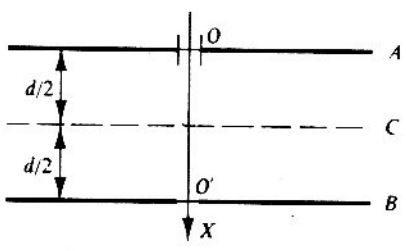


Figura 4-11

Solución. *a*) La capacidad de un condensador plano está dada por la fórmula: $C = \varepsilon_0 S/d$.

b) Por definición, se tiene que $Q = CV$, de donde $V = Q/C = Qd/\varepsilon_0 S$.

c) En el interior del condensador plano el campo eléctrico E es constante en todo punto. Entonces $|\mathbf{E}| = V/d$. Como B está a un potencial positivo, $\mathbf{E}$ está dirigida de B hacia A.

d) Una carga $-q$ colocada en un campo eléctrico $\mathbf{E}$ está sometida a una fuerza $\mathbf{F} = -q\mathbf{E}$ y dirigida de A hacia B. Según el principio fundamental de la dinámica: $F = m\mathbf{a}$. Despreciando la fuerza de gravedad se obtiene la ecuación diferencial del movimiento: $qE = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$.

1) La ecuación horaria $x(t)$ se obtiene integrando la ecuación diferencial. Una primera integración da:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{qE}{m}t + v_0 \tag{1}$$

Una segunda integración da:

$$x = \frac{qE}{2m}t^2 + v_0 t + x_0$$

Las constantes de integración v_0 y x_0 representa la velocidad y la posición en el instante $t = 0$, son nulas según las condiciones iniciales. Se obtiene:

$$x = \frac{qE}{2m}t^2 = \frac{qV}{2md}t^2 \tag{2}$$

2) La velocidad del electrón en O' se obtiene calculando el tiempo empleado a partir de (2), y según (1) se obtiene:

$$t = \sqrt{\frac{2md}{qE}}, \text{ de donde } v'_0 = \frac{qE}{m}\sqrt{\frac{2md}{qE}} = \sqrt{\frac{2qEd}{m}} = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

Se obtiene el mismo resultado escribiendo la ecuación de la conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV \quad \therefore\ v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

e) 1) Los campos $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ son:

$$|\mathbf{E}_1| = \frac{2|V'|}{d}, \qquad \mathbf{E}_1 \text{ dirigido de } A \text{ hacia } C$$

$$|\mathbf{E}_2| = \frac{2(V + |V'|)}{d}, \ \mathbf{E}_2 \text{ dirigido de } B \text{ hacia } C$$

2) El electrón que sale de O está sometido entre A y C a una fuerza constante que se opone a su movimiento: su movimiento es entonces uniformemente retardado. Dos casos son posibles:

— El electrón pasa por la malla C; entonces está sometido a un movimiento uniformemente acelerado de C hacia B.

— El electrón no pasa por la malla C; está sometido a un movimiento uniformemente acelerado de C hacia A.

Entre A y C la ecuación diferencial del movimiento es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2qV'}{d}$$

Al integrar se obtiene:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2qV'}{md}t + v_0 \quad \therefore\ x = \frac{qV'}{md}t^2 + v_0 t$$

Para calcular el potencial mínimo V' para que el electrón no pase a través de la malla C es suficiente calcular V', que corresponde a una velocidad nula del electrón cuando llega a C. Se obtiene:

$$t = -\frac{mv_0 d}{2qV'} \quad \therefore\ \frac{d}{2} = \frac{qV'}{md}\left(\frac{mv_0 d}{2qV'}\right)^2 - \frac{mv_0^2 d}{2qV'} = -\frac{v_0^2 md}{4qV'} \quad \therefore\ V'_{\min} = -\frac{v_0^2 m}{2q}$$

Problema 4-22 Un condensador cilíndrico está formado por dos armaduras sobre el mismo eje xx', de radios $R_1 = 10$ centímetros, $R_2 = 20$ centímetros y de altura $h = 1{,}5$ metros. Sean $+Q$ y $-Q$ las cargas de la armadura interior y exterior. *a*) Calcule el campo eléctrico E que existe entre las armaduras del condensador. *b*) Calcule la diferencia de potencial entre las armaduras. *c*) Calcule la capacidad del condensador colocado en el vacío. *d*) Calcule la capacidad del condensador colocado en un medio dieléctrico de constante $\varepsilon_r = 4{,}5$ (permitividad relativa). *e*) Calcule la energía electrostática del condensador colocado en el medio dieléctrico.

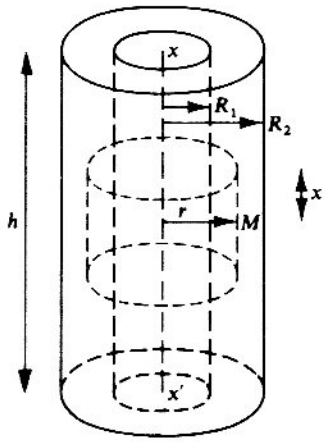


Figura 4-12

Solución. *a*) Como el condensador es bastante largo se puede suponer infinito, lo cual equivale a despreciar los efectos en los bordes. Como el sistema representa un cilindro simétrico, se puede utilizar el teorema de Gauss. Sea M un punto entre las dos armaduras. Construyamos una superficie de Gauss para el sistema, es decir, un cilindro de altura h, radio r y que pasa por M. En todo punto de ese cilindro el campo E es normal y constante. El flujo del campo eléctrico es, según el teorema de Gauss: $\phi = \dfrac{Q \cdot x}{h \cdot \varepsilon_0} = E \cdot S$, donde S representa la superficie lateral del cilindro de Gauss; la contribución al flujo de las superficies de las bases del cilindro es nula porque en esos puntos el campo E está en el plano de la superficie. Como $S = 2\pi rx$, se obtiene:

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h} \cdot \frac{1}{r}$$

b) La relación que liga el campo eléctrico al potencial es $E = -dV/dr$ o $dV = -Edr$. La diferencia de potencial entre las armaduras es:

$$\Delta V = V_{R_1} - V_{R_2} = -\int_{R_2}^{R_1} Edr = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h} \cdot \frac{dr}{r} = \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0 h} \int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{r} = \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0 h} \Big[\ln r \Big]_{R_2}^{R_1} =$$

$$= \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln \frac{R_1}{R_2} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}$$

c) La capacidad del condensador está definida como la relación entre la carga almacenada y la diferencia de potencial aplicada a las armaduras:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad \therefore C = \frac{Q}{\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln \dfrac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln \dfrac{R_2}{R_1}}$$

d) En un dieléctrico la capacidad se obtiene remplazando la constante dieléctrica del vacío ε_0 por la del medio: $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$. De donde:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r h}{\ln \dfrac{R_2}{R_1}}$$

e) La energía almacenada por el condensador es:

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r h} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 \cdot \ln 2 \cdot 18 \cdot 10^9}{4{,}5 \cdot 1{,}5} = 0{,}92 \cdot 10^9 \, Q^2$$

Problema 4-23 Un condensador está compuesto por dos láminas cuadradas de lado a y que forman un ángulo θ entre sí. Muestre que para los ángulos θ pequeños la capacidad está dada por:

$$C = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d} \left(1 - \frac{a}{2} \cdot \frac{\theta}{d}\right)$$

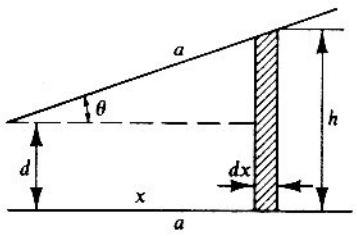


Figura 4-13

Solución. Considere un condensador elemental de longitud dx y de separación h. La capacidad de ese elemento es, según la capacidad de un condensador plano:

$$dC = \frac{\varepsilon_0 \cdot a dx}{h}$$

h expresada en función de a y θ es $h = d + x \operatorname{tg} \theta$. La capacidad total es la suma de todas las capacidades elementales. Los extremos de integración son O y $x = a \cos \theta$, que es el valor límite de x para que existan los elementos correspondientes. Entonces:

$$C = \int_0^{a\cos\theta} \varepsilon_0 a \frac{dx}{d + x \operatorname{tg}\theta} = \varepsilon_0 a \int_0^{a\cos\theta} \frac{dx}{d + x \operatorname{tg}\theta} = \frac{\varepsilon_0 a}{\operatorname{tg}\theta} \Big[\ln (d + x \operatorname{tg}\theta)\Big]_0^{\cos\theta} =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 a}{\operatorname{tg}\theta} [\ln (d + a \operatorname{sen}\theta) - \ln d] = \frac{\varepsilon_0 a}{\operatorname{tg}\theta} \ln \left(1 + \frac{a \operatorname{sen}\theta}{d}\right)$$

Si θ es pequeño, $\operatorname{tg}\theta \approx \operatorname{sen}\theta = \theta$. De donde $C = \frac{\varepsilon_0 a}{\theta} \ln \left(1 + \frac{a\theta}{d}\right)$. Como θ es pequeño, $\frac{a\theta}{d}$ es despreciable con relación a 1, y al calcular el desarrollo limitado de $\ln \left(1 + \frac{a\theta}{d}\right)$, se obtiene:

$$\ln (1 + x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots$$

para x pequeño. Entonces:

$$C = \frac{\varepsilon_0 a}{\theta} \left(\frac{a\theta}{d} - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\theta^2}{d^2}\right) = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d} \left(1 - \frac{a}{2} \cdot \frac{\theta}{d}\right)$$

Nota. El caso límite se obtiene cuando $\theta = 0$, y que da la capacidad de un condensador plano de superficie a^2 y espesor d:

$$C = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d}$$

Problema 4-24 Un condensador plano, formado por las láminas cuadradas de 60 centímetros de lado, se sumerge en un dieléctrico líquido de constante relativa $\varepsilon_r = 2$. *a*) Calcule la capacidad en función de la distancia d de sus armaduras. *b*) Las láminas están unidas a una batería de 20 000 voltios y se reduce la separación de las armaduras de $d_0 = 5$ centímetros a $d_1 = 1$ centímetro. ¿Cuál es la energía que recibe el condensador en el curso de la operación. *c*) Si la separación inicial es de $d_0 = 5$ centímetros y se aísla el condensador de la batería de 20 000 voltios, calcule la energía recibida por el condensador cuando se ha reducido la separación a $d_1 = 1$ centímetro. *d*) ¿Cuál es la fuerza ejercida por el experimentador en función de la separación x de las placas $d_0 \geq x \geq d_1$ en el curso de las operaciones anteriores?

Solución. *a*) La capacidad del condensador plano es $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d}$. De donde:

$$C = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \cdot 2 \cdot \frac{(0{,}6)^2}{d} = \frac{2 \cdot 10^{-11}}{\pi d} \; ; \; C_{\text{faradios}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{10^{-11}}{d_{\text{metros}}}$$

b) Como la separación del condensador se realiza conectado a la batería, la operación tiene lugar a potencial constante. La energía almacenada es $W = \frac{1}{2} CV^2$. Entonces la energía recibida es:

$$\Delta W = W - W_0 = \frac{1}{2} V^2 (C_1 - C_0), \text{ con } C_1 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{10^{-11}}{d_1} \text{ y } C_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{10^{-11}}{d_0}$$

$$\therefore \Delta W_{V=\text{cte}} = \frac{1}{2\pi} V^2 \cdot 2 \cdot 10^{-11} \left[\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_0} \right]$$

Como $d_1 = 10^{-2}$ m, y $d_0 = 5 \cdot 10^{-2}$ m, $\Delta W_{V=\text{cte}} \quad \frac{4 \cdot 10^8 \cdot 10^{-11} \cdot 10^2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 0{,}102$ J.

c) Como el condensador está aislado de la batería, la operación tiene lugar a carga constante. La energía almacenada para cada valor de la separación vale $W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}$. Como Q es constante: $Q = C_0 V$, V es el potencial de la batería. De donde $W = \frac{1}{2} \cdot \frac{C_0^2 V^2}{C}$. La energía recibida es entonces:

$$\Delta W_{Q=\text{cte}} = \frac{1}{2} C_0^2 V^2 \left[\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_0} \right] = \frac{40}{25\pi} [d_1 - d_0] = -2{,}04 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

d) El trabajo realizado por la fuerza **F** al desplazarse $d\mathbf{x}$ es: $dT = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$. Sea F la fuerza ejercida por el experimentador sobre las placas y dx el desplazamiento de una de las placas con relación a la otra:

1. *Carga constante.* El sistema está aislado, la energía total debe ser constante. Si dW es la variación de la energía almacenada en el condensador, se tiene $dW = -dT$. La magnitud de **F** es $F = \frac{dW}{dx}$. Como

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} \; ; \quad \frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} Q^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{C} \right) = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r S}$$

$$\therefore F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r S}$$

Entonces la fuerza F es constante para todo x.

2. *Potencial constante.* El sistema no está aislado y unido a un generador que asegura una tensión V constante.

Sea dE_J la energía suministrada por el generador cuando se desplaza una de las armaduras una distancia dx por la acción de una fuerza F. Entonces:

$$dW_{Q=\text{cte}} + dT = dE_J$$

Si dQ es la cantidad de carga sobre una armadura, se tiene:

$$dE_i = V dQ = V^2 dC$$

De donde $V^2 \cdot dC = dT + \frac{1}{2} V^2 \cdot dC$; $dT = \frac{1}{2} V^2 dC$.

$$F = \left| \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx} \right| = \frac{1}{2} V^2 \cdot \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{S} \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) \right| = \frac{1}{2} V^2 \cdot \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{S} \cdot \frac{1}{x^2}$$

La fuerza F no es constante para todo x, varía según $1/x^2$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Un capacitor cuyas armaduras están separadas 0,3 milímetros aumenta su capacitancia al sumergirlo en un líquido, siendo necesario aumentar en 5 milímetros la distancia entre las placas para restablecer el primitivo valor de la capacitancia. Hállese la constante dieléctrica del líquido.

2. ¿Qué capacitancia tiene la Tierra supuesta aislada y esférica?

3. Un capacitador esférico completamente aislado adquiere una carga de 10^{-6} culombios en su armadura interna de $r = 20$ centímetros al conectarla con un generador, mientras su armadura externa de $R = 20{,}3$ centímetros está conectada a tierra. Después de cargado se conecta con tierra la armadura interna. ¿Cuál es la carga que pasa a tierra?

4. Calcule la energía almacenada en un capacitor de 90 picofaradios: *a*) al cargarlo con una d.d.p. de 2000 voltios; *b*) cuando la carga de su armadura es $5 \cdot 10^{-6}$ culombios.

5. ¿Cómo puede aumentarse la capacitancia de un capacitor de armaduras fijas?

6. ¿Qué es la «perforación» de un conductor?

7. Calcule los radios que deben tener tres esferas conductoras para que sus capacitancias respectivas sean: 1 faradio, 1 microfaradio y 1 picofaradio.

8. Dos esferillas metálicas electrizadas del mismo signo y colocadas a una distancia de 6 centímetros en el vacío se repelen con una fuerza de 20 dinas. Se las pone en contacto y se las coloca de nuevo a una distancia igual a la tercera parte, siendo entonces la fuerza de repulsión de 124 dinas. Sabiendo que sus radios son de 0,5 centímetros y 2 centímetros, calcule sus cargas y el potencial que tienen al final.

9. Tres condensadores de 2 microfaradios cada uno se asocian de todas las maneras posibles. Calcule la capacidad equivalente en cada caso.

10.

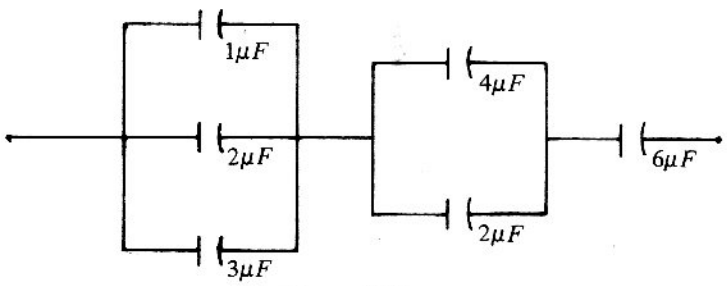


Figura 4-14

Si Vab = 120 voltios. Calcular:

a) Capacidad equivalente del sistema.
b) Carga en cada condensador.
c) Diferencia de potencial entre las armaduras de cada condensador.
d) Energía almacenada por el sistema y por cada condensador.

11. En un condensador variable de radio la capacidad cambia de 100 $\mu\mu F$ a 1000 $\mu\mu F$ cuando se gira el mando desde 0° hasta 180°. Con el mando puesto en 180° se conecta el condensador a una batería de 600 voltios. Después de cargado se desconecta de la batería y se retrocede el mando a 0°. Calcular:

a) Carga del condensador.
b) Diferencia de potencial entre sus armaduras con el mando puesto a 0°.
c) Energía del condensador en esta posición.
d) Trabajo realizado para girar el mando (despreciese el rosamiento).

$e^- = -1{,}6 \times 10^{-19}$: carga de un electrón

Sea: $|e^-| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C : la carga de un protón

A : el area Transversal de un conductor

δ_e : la densidad de electrones libres de un material o "conductor" o solución conductora : (# de electrones libres por unidad de volumen) es el

δ_p : " " " protones " " " " " " " " " " : (# de protones libres por unidad de volumen)

v_e : la velocidad de arrastre de un electrón através del conductor

v_p : " " " " " " " protón " " "

δ : densidad del conductor

N_A : # de Avogadro $= 6{,}023 \times 10^{23}$ at/mol

CAPITULO 5

Corriente eléctrica

Intensidad de corriente. El desplazamiento de las cargas eléctricas entre dos puntos de un conductor recibe el nombre de *corriente eléctrica.* Se llama *intensidad* I de una corriente eléctrica en un conductor al número de portadores de carga Q que atraviesan la sección transversal A del mismo por unidad de tiempo:

$$i = \frac{Q}{t} \qquad i = \frac{dq}{dt} = |e^-|A(\delta_e \cdot |v_e| + \delta_p \cdot |v_p|) \quad (1)$$

Para cualquier conductor:

La unidad de intensidad es el amperio, A, y corresponde a la relación:

$$\delta_e = \left(\frac{\#\text{ de electrones libres}}{\text{por átomo}}\right) \times \frac{\delta \cdot N_A}{\text{Masa at-g}}$$

$$1\,A = \frac{1 \text{ culombio}}{1 \text{ segundo}}$$

el # de electrones que atraviesan en 1 seg por una area transv. A es:

$$\#e^- \text{ por seg} = i/e^-$$

j : Densidad de corriente. El cociente $\frac{i}{A}$ se define como la *densidad de corriente* J en un conductor de sección A por el que circula una intensidad i:

Potencia $P = \Delta V\, i$

$$\vec{J} = \frac{di}{dS} = A|e^-|(\delta_e \cdot |v_e| + \delta_p \cdot |v_p|) = J = \sigma E$$

j Es la velocidad media de la corriente através de A

es una magnitud vectorial cuyo sentido y dirección son los del vector velocidad de la *corriente.*

$$\Rightarrow i = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Ley de Ohm. El físico J. Simón Ohm descubrió experimentalmente la relación entre la intensidad de corriente en un conductor y la diferencia de potencial entre sus extremos (solo para algunos materiales y para un intervalo de voltaje determinado, para c/material)

$$\frac{V_A - V_B}{I} = k$$

El valor de k depende de la geometría del conductor, de su naturaleza y de la temperatura. Para un valor dado de esta última, la relación entre los demás factores es:

Resistencia $k = R = \frac{1}{A}\rho \qquad \rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{E}{j} \Rightarrow j = f(E) = \sigma E = \sigma \frac{V_{ab}}{l}$

siendo l la longitud del conductor, S su sección y ρ una constante específica de la sustancia conductora llamada *resistividad.* Su inversa $\frac{1}{\rho}$ es la *conductividad,* σ.

Si gradiente de potencial es: $E = -\frac{dV}{dl}$ (campo eléctrico)

$\rho = f(T)$ es decir, la resistividad de un material varía con la variación de Temperatura.

k representa la *resistencia* que el conductor opone a ser recorrido por una corriente y en consecuencia:

$$\frac{V_A - V_B}{I} = R = \frac{\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}}{\int \mathbf{j}\cdot d\mathbf{s}} = \rho \frac{\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}}{\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}} \quad (5\text{-}3) = \rho \int \frac{d\mathbf{r}}{A} = R$$

que es la expresión de la ley de Ohm, siendo R la resistencia óhmica.

La unidad de resistencia es el ohmio, Ω, y equivale:

$$\frac{1}{R} = \mathcal{C} \text{ conductancia} \qquad 1\,\Omega = \frac{1 \text{ Voltio}}{1 \text{ Amperio}} = \frac{\text{Voltio seg}}{\text{Colomb}} = \frac{\text{N m seg}}{\text{C}} \frac{\text{seg}}{\text{C}} = \frac{\text{J seg}}{\text{C}^2}$$

La resistividad ρ se mide, en el sistema M.K.S., en ohmios metro ($\Omega \cdot$ m).

Variación de la resistencia con la temperatura. Al ser la resistencia función de la longitud del conductor y ésta a su vez de la temperatura; resulta:

$$R_t = R_0(1 + \alpha t)$$

siendo R_t la resistencia a $t°$ C, R_0 la resistencia a 0°C y α [el coeficiente de variación de la resistividad con la temperatura de cada conductor.]

La resistencia de un conductor crece con la temperatura, según la anterior ley.

Asociación de resistencias. *a*) Asociación en serie (Fig. 5-1). En este caso la intensidad i de corriente es igual para todas, y, por tanto, $\Delta V_{equiv.} = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \ldots + \Delta V_n$

$$\Rightarrow \quad V_A - V_{P'} = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) + \ldots + (V_P - V_{P'}) =$$

$$= iR_1 + iR_2 + \ldots + iR_n = i(R_1 + R_2 + \ldots + R_n) = i\sum_i R$$

como: $I_1 = I_2 = \ldots = I_n = I$

de donde

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n \quad \text{o bien} \quad R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i \qquad (5\text{-}4)$$

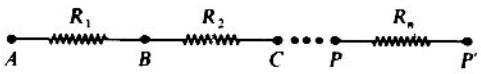


Figura 5-1

b) Asociación en paralelo (Fig. 5-2). En este caso es la diferencia de potencial entre los extremos de cada una de ellas la que permanece constante, siendo en consecuencia diferente la intensidad correspondiente:

$$= V_A - V_B = R_1 \cdot i_1 = R_2 \cdot i_2 = \ldots = R_n \cdot i_n \qquad \Delta V_1 = \Delta V_2 = \ldots = \Delta V_n = \Delta V$$

o bien

$$\frac{i_1}{1/R_1} = \frac{i_2}{1/R_2} = \ldots = \frac{i_n}{1/R_n}$$

y como:

$$i = i_1 + i_2 + \ldots + i_n \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$

y en general:

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i} \qquad (5\text{-}5)$$

en un circuito en serie $\frac{RC}{\text{sea } \tau = RC}$

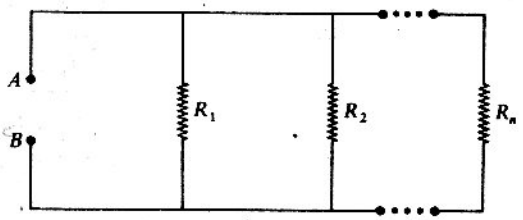


Figura 5-2

Ley de Joule. Cuando una carga q circula a lo largo de un conductor entre cuyos extremos existe una diferencia de potencial V, realiza un trabajo que se expresa:.

$$W = q \cdot V = i \cdot t \cdot V$$

Este trabajo, en general, se transforma en calor y puesto que Q (calorías) $= W \cdot 0{,}24$:

$$Q = 0{,}24 \cdot i \cdot V \cdot t$$

o bien

$$Q = 0{,}24 \cdot i^2 R \cdot t \qquad (5\text{-}6)$$

que es la expresión de la ley de Joule.

Potencia. Por la definición de potencia podemos escribir:

$$P = \frac{W}{t} = i \cdot V_{ab} = i^2 R = \frac{V_{ab}^2}{R} = P \qquad (5\text{-}7)$$

La unidad de potencia es el vatio (W):

$$1 \text{ vatio} = 1 \text{ amperio} \cdot 1 \text{ voltio} = \frac{1 \text{ julio}}{1 \text{ segundo}}$$

y sus múltiplos más usuales:

$$1 \text{ kilovatio} = 1 \text{ kW} = 10^3 \cdot \text{W}$$
$$1 \text{ megavatio} = 1 \text{ MW} = 10^6 \cdot \text{W}$$

Fuerza electromotriz (f.e.m.). Se llama f.e.m., $\mathcal{E}$, de un generador al cociente entre la potencia de éste y la intensidad de la corriente que suministra:

$$\mathcal{E} = \frac{P}{i} = \frac{W_{ext}}{t\,i} = \frac{W_{ext}}{q} = V_{ab} + V_{perdido} \qquad (5\text{-}8)$$

O sea, la energía por unidad de carga que comunica el generador a las cargas que lo atraviesan.

En los aparatos consumidores de corriente la relación entre la potencia consumida y la intensidad de la corriente que los recorre recibe el nombre de *fuerza contraelectromotriz* (f.c.e.m.). Es decir, la energía por unidad de carga tomada de las cargas que lo atraviesan.

$$\mathcal{E}' = V_{ab} - \Delta V_{ganado}$$

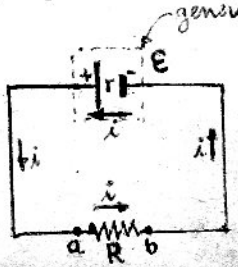
Ley de Ohm para un circuito cerrado. Consideremos los siguientes casos:

a) *Circuito con generador.* Si el circuito está recorrido por una corriente de intensidad i, la potencia suministrada por el generador valdrá: $\mathcal{E} \cdot i$. Teniendo en cuenta las resistencias R y r correspondientes al circuito externo y al interno del generador, respectivamente:

$$\mathcal{E} \cdot i = R \cdot i^2 + r \cdot i^2$$

de donde

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \qquad (5\text{-}9)$$



b) *Circuito con generador y aparato consumidor (receptor).* En este caso la energía $\mathcal{E} \cdot i$ suministrada por el motor al circuito se transforma en calor y en trabajo mecánico; por tanto:

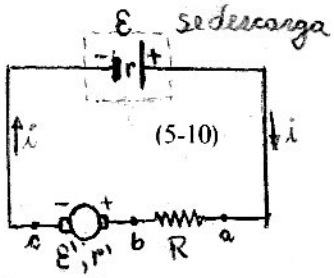
$$\mathcal{E} \cdot i = \mathcal{E}' \cdot i + R \cdot i^2 + r \cdot i^2 + r' \cdot i^2$$

de donde

$$i = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}'}{R + r + r'} = \frac{-(\Sigma \mathcal{E}' - \Sigma \mathcal{E})}{\Sigma R} \qquad (5\text{-}10)$$

siendo $\mathcal{E}'$ = f.c.e.m. y r' = resistencia interna del motor.

fuerza consumida eléctrica por el motor



Ley de Ohm para un circuito abierto. Consideremos la Figura 5-3 y podremos establecer, aplicando (5-9),

$$\mathcal{E} = R \cdot i + r \cdot i$$

$$R \cdot i = V_A - V_B = V_C - V_D$$

y por tanto,

$$\mathcal{E} = V_C - V_D + r \cdot i$$

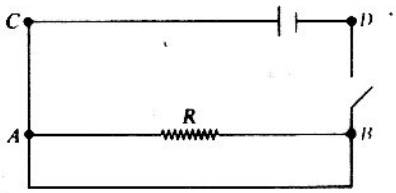
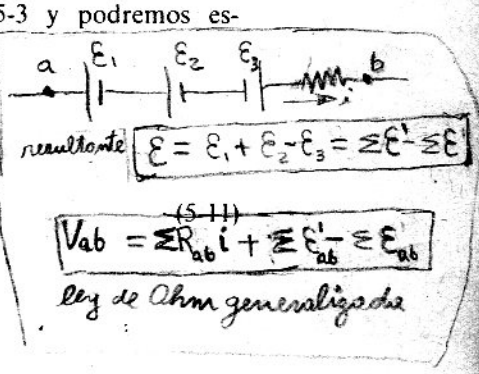


Figura 5-3



Leyes de Kirchhoff. Se utilizan para conocer la intensidad de la corriente que circula por cada parte de una red de conductores cuando en ella se encuentran agrupaciones complejas de resistencias y generadores. (Fig. 5-4.)

Principio de conservación de la carga (ley de los nodos):

1. La suma de las intensidades de corriente que llegan a un *nudo* es igual a la suma de las intensidades que salen de él: (por t = q cargas)

$$\Sigma q_{entran} - \Sigma q_{sal} = \sum_k q_k = 0 \;\div t \Longrightarrow \boxed{\sum_k i_k = 0 = \Sigma i_{entran} - \Sigma i_{salen}} \quad (1)$$

Principio de conservación de la energía (ley de las mallas)

2. La suma de las f.e.m. existentes en una *malla* es igual a la suma de todos los productos $R_k \cdot i_k$ de los conductores que la constituyen:

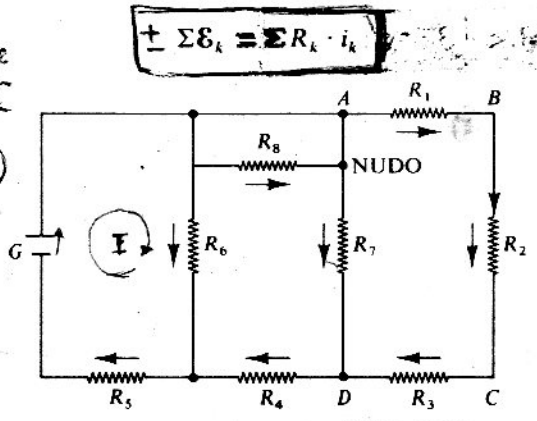
en una malla

$$\pm \Sigma \mathcal{E}_k = \Sigma R_k \cdot i_k \Longrightarrow \oint \pm \Sigma \mathcal{E} \mp \Sigma \Delta V = 0 \quad (2)$$

para cualquier elemento del circuito que nos sea $\mathcal{E}$

Debido a que un circuito tiene un potencial determinado para cada uno de sus puntos, la diferencia de potencial entre un mismo punto será cero ($V_{aa} = V_a - V_a = 0$). Por tanto la ec. (2) se puede aplicar a cualquier ruta o hilo del circuito que regrese a un mismo punto (siendo la ruta cualquier vuelta completa: un lazo cerrado del circuito, llamado malla)

Esta ecuación es aplicable para cualquier ruta o hilo del circuito que tenga como puntos: inicial y final todos puntos de igual potencial (es decir que la diferencia de potencial entre ellos sea cero). Además de que la ecuación (2) es aplicable a cualquier malla del circuito.



ABCD = malla

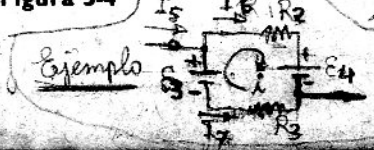
Figura 5-4

$$\Rightarrow V_{aa} = \int_a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

$$\therefore \boxed{\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0}$$

Para ver los signos correctos de la ecuación (2) vea el problema 5-28

Ejemplo



de la ley de los nodos: $I_5 - I_6 - I_7 = 0$

de la ley de las mallas: $-\mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 + I_6 R_2 - I_7 R_3 = 0$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 5-1 *a*) ¿Cuál es la intensidad de corriente que pasa por un alambre si 50 000 culombios pasan por determinado punto cada hora? *b*) ¿Cuál es la resistencia de un alambre de cobre de 1 metro de longitud y de sección transversal $5 \cdot 10^{-6}$ metros cuadrados? $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ ohmios · metro.

Solución. *a*) Intensidad = C/seg = 50 000 C/3600 seg = 13,9 A.

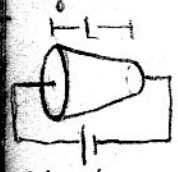
b) $R = \rho l/A = \dfrac{(1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega\text{-m})\ 1\ \text{m}}{5 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2} = 34 \cdot 10^{-4}\ \Omega.$

Problema 5-2 *a*) Un filamento de tungsteno de 1 milímetro cuadrado de sección transversal y 0,4 metros de longitud tiene una resistencia de 0,022 ohmios. ¿Cuál es su resistividad? *b*) La resistencia de un alambre de cobre a 0° C es de 200 ohmios. ¿Cuál es su resistencia a 60° C? α para el cobre es $4 \cdot 10^{-3}\ ^\circ\text{C}^{-1}$.

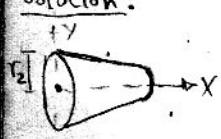
Solución. *a*) Como $R = \rho l/A$, entonces: $\rho = RA/l = \dfrac{0{,}022\ \Omega\ (1 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2)}{0{,}4\ \text{m}} = 5{,}5 \cdot 10^{-8}\ \Omega\text{-m}.$

b) $R = R_0(1 + \alpha t) = 200\ \Omega\ (1 + 4 \cdot 10^{-3}\ ^\circ\text{C}^{-1} \cdot 60\ ^\circ\text{C}) = 248\ \Omega.$

encontrar la R del siguiente objeto



Solución:



$y = mx + r_2$

$y = \dfrac{r_1 - r_2}{L} x + r_2$

Como $dR = \rho \dfrac{dl}{A}$:

$dR = \rho \dfrac{dx}{\pi y^2}$

$dR = \dfrac{\rho}{\pi} \dfrac{dx}{\left(\frac{r_1 - r_2}{L} x + r_2\right)^2}$

$R = \dfrac{\rho}{\pi \left(\frac{r_1 - r_2}{L}\right)^2} \int_0^L \dfrac{dx}{\left(x + \frac{L r_2}{r_1 - r_2}\right)^2}$

$R = \dfrac{\rho}{\pi \left(\frac{r_1 - r_2}{L}\right)^2} \left[\dfrac{-1}{x + \frac{L r_2}{r_1 - r_2}}\right]_0^L$

$R = \dfrac{\rho L}{\pi r_1 r_2}$

Problema 5-3 *a*) ¿Cuál es la resistencia total del circuito que muestra la Figura 5-5? *b*) Si la fuerza electromotriz aplicada al circuito es de 100 voltios, ¿cuál es la intensidad de corriente? *c*) ¿Cuál es el voltaje en cada resistencia?

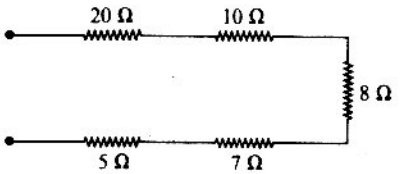


Figura 5-5

Solución. *a*) Como la resistencia está en serie, la resistencia total es igual a la suma de todas las resistencias; entonces:

$$R = 20 + 10 + 8 + 7 + 5 = 50\ \Omega$$

b) Como $E = IR$:

$$I = E/R = 100\ \text{V}/50\ \Omega = 2\ \text{A}$$

c) El voltaje de cada resistencia depende de la magnitud de la resistencia y de la cantidad de intensidad que pase. Como voltaje (E) = IR, se puede calcular la caída de tensión en cada resistencia:

Para la resistencia de 20 Ω: voltaje = IR = 2 A · 20 Ω = 40 V.
Para la resistencia de 10 Ω: voltaje = IR = 2 A · 10 Ω = 20 V.
Para la resistencia de 8 Ω: voltaje = IR = 2 A · 8 Ω = 16 V.
Para la resistencia de 7 Ω: voltaje = IR = 2 A · 7 Ω = 14 V.
Para la resistencia de 5 Ω: voltaje = IR = 2 A · 5 Ω = 10 V.

La caída total de potencial es de 100 V, que es la suma de caída de voltaje en cada una de las resistencias.

Problema 5-4 Tres resistencias de 20, 10 y 4 ohmios se conectan en paralelo. *a*) ¿Cuál es la resistencia equivalente de la combinación? *b*) Si la fuerza electromotriz en el circuito

es de 10 voltios, ¿cuál es la intensidad total que pasa? *c*) ¿Qué intensidad pasa por cada resistencia? *d*) ¿Qué resistencia se debe colocar en paralelo, con una resistencia de 10 ohmios, para que produzca una resistencia combinada de 8 ohmios?

Solución. *a*) La resistencia está dada por:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{20} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} = \frac{4}{10} \quad \therefore R = \frac{10}{4} = 2{,}5\ \Omega$$

b) Como la fuerza electromotriz es de 10 V y la resistencia total de 2,5 Ω, la intensidad total $I = E/R = 10\ \text{V}/2{,}5\ \Omega = 4\ \text{A}$.

c) Para la resistencia de 20 Ω: $I = E/R = 10\ \text{V}/20\ \Omega = 0{,}5\ \text{A}$.
Para la resistencia de 10 Ω: $I = E/R = 10\ \text{V}/10\ \Omega = 1\ \text{A}$.
Para la resistencia de 4 Ω: $I = E/R = 10\ \text{V}/4\ \Omega = 2{,}5$
Corriente total $= 0{,}5\ \text{A} + 1\ \text{A} + 2{,}5\ \text{A} = 4\ \text{A}$.

d) Empleando la fórmula: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, $\frac{1}{8} = \frac{1}{10} + \frac{1}{R_2}$.

$$\therefore \frac{1}{R_2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{10} = \frac{1}{40} \quad \therefore R_2 = 40\ \Omega$$

Problema 5-5 Se da el siguiente circuito [Fig. 5-6(a)]. Halle: *a*) la resistencia total; *b*) la intensidad total; *c*) la caída de voltaje en cada resistencia; *d*) la intensidad que pasa por cada rama.

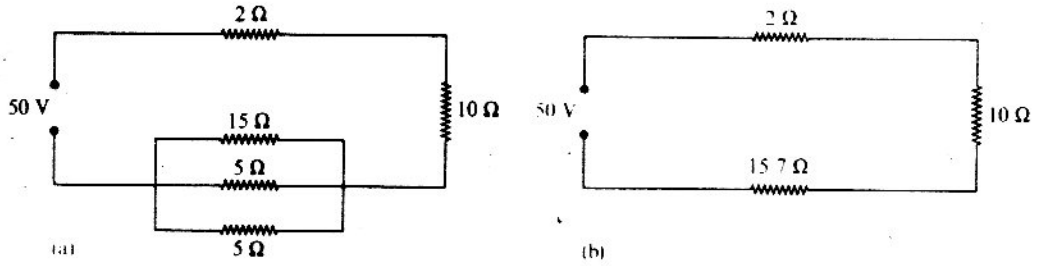


Figura 5-6

Solución. *a*) La resistencia de la combinación en paralelo es:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{15} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{7}{15} \quad \therefore R = \frac{15}{7}\ \Omega$$

Ahora considere la combinación en paralelo como equivalente a una resistencia de $\frac{15}{7}\ \Omega$ en el mismo circuito, como se indica en la Figura 5-6(b).

b) Entonces, como todas las resistencias están en serie, la resistencia total es:

$$2\ \Omega + 10\ \Omega + \frac{15}{7}\ \Omega = 14{,}1\ \Omega$$

La intensidad total $= E/R = 50\ \text{V}/14{,}1\ \Omega = 3{,}5\ \text{A}$.

c) La caída de voltaje en la resistencia de 2 Ω $= IR = 3{,}5\ \text{A} \cdot 2\ \Omega = 7\ \text{V}$.
La caída de voltaje en la resistencia de 10 Ω $= IR = 3{,}5\ \text{A} \cdot 10\ \Omega = 35\ \text{V}$.
La caída de voltaje en la resistencia combinada $= IR = 3{,}5\ \text{A} \cdot \frac{15}{7}\ \Omega = 7{,}5\ \text{V}$.

d) Para hallar la intensidad que pasa por cada resistencia vemos que la intensidad total (3,5 A) pasa por todas las partes del circuito; por tanto, es la intensidad de corriente que pasa por las resistencias de 2 y 10 Ω y también es la intensidad de la corriente que pasa por la combinación.

Para cada resistencia de la combinación, $I = E/R$; por tanto, en la resistencia de 15 Ω, $I = E/R = 7{,}5\ \text{V}/15\ \Omega = \frac{1}{2}$ A. En la resistencia de 5 Ω, $I = E/R = 7{,}5\ \text{V}/5\ \Omega = 1{,}5$ A (en cada una de las resistencias de 5 Ω).

Problema 5-6 Una batería que tiene una fuerza electromotriz de 24 voltios y una resistencia interna de 1 ohmio se conecta a cinco resistencias de 30 ohmios en paralelo. Halle: *a*) la resistencia total; *b*) la intensidad total; *c*) la intensidad de corriente que pasa por cada resistencia; *d*) el voltaje final de la batería mientras produce corriente.

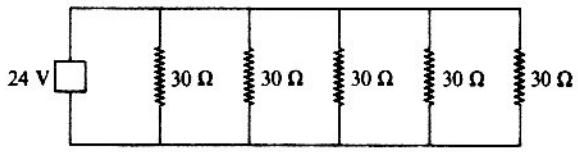


Figura 5-7

Solución. *a*) Para hallar la resistencia de la combinación en paralelo,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \qquad \therefore\ R = 6\ \Omega$$

la resistencia total es igual a la resistencia de la combinación en paralelo más la de la batería $= 6\ \Omega + 1\ \Omega = 7\ \Omega$ (porque están en serie).

b) La intensidad total $= E/R = 24\ \text{V}/7\ \Omega = 3{,}4$ A.

c) Como las resistencias son iguales, 1/5 de la intensidad total pasa por cada una de ellas: $(1/5) \cdot 3{,}4\ \text{A} = 0{,}68$ A es la intensidad de la corriente que pasa por cada resistencia.

d) El voltaje final de la batería es igual a la fuerza electromotriz menos Ir, caída de voltaje debida a la resistencia interna. La caída Ir de voltaje en la batería $= 3{,}5\ \text{A} \cdot 1\ \Omega = 3{,}5$ V; por tanto, el voltaje final es de $24\ \text{V} - 3{,}5\ \text{V} = 20{,}5$ V. La caída de voltaje de las resistencias en paralelo es de 20,5 V.

Problema 5-7 Hay dos pilas iguales con una fuerza electromotriz de 2 voltios y una resistencia interna de 0,3 ohmios. ¿Cómo hay que unir estas pilas (en serie o en paralelo) para obtener la mayor intensidad de corriente si: *a*) la resistencia exterior es igual a 0,2 ohmios, y *b*) la resistencia exterior es igual a 16 ohmios? Calcule la intensidad de la corriente en cada uno de estos casos.

Solución. Conectando las pilas en serie tenemos que: $I' = \dfrac{2\mathcal{E}}{2r + R}$, y conectándolas en paralelo: $I'' = \dfrac{\mathcal{E}}{0{,}5r + R}$.

a)
$$I' = \frac{2 \cdot 2\ \text{V}}{(0{,}6 + 0{,}2)\ \Omega} = 5\ \text{A}, \qquad I'' = \frac{2}{0{,}15 + 0{,}2} = 5{,}71\ \text{A}$$

b)
$$I' = \frac{4\ \text{V}}{(0{,}6 + 16)\ \Omega} = 0{,}24\ \text{A}, \quad I'' = \frac{2}{0{,}15 + 16} = 0{,}124\ \text{A}$$

Así tenemos que cuando la resistencia exterior es pequeña es conveniente unir pilas en paralelo, y cuando la resistencia exterior es grande, en serie.

Problema 5-8 En la Figura 5-8 se tiene una resistencia de $R = 0{,}1$ ohmio y dos pilas $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ de igual fuerza electromotriz de 2 voltios. Las resistencias internas de estas pilas son, respectivamente, $r_1 = 1$ ohmio y $r_2 = 1{,}5$ ohmios. Halle la diferencia de potencial en los bornes de cada pila.

Solución. La intensidad de la corriente en el circuito $I = \dfrac{2\,\mathcal{E}}{R + r_1 + r_2} = (4/2{,}6\ \text{A}) = 1{,}5\ \text{A}$. La diferencia de potencial en los bornes de la primera pila será $U_1 = \mathcal{E} - Ir_1 = 2 - 1{,}5\ \text{A} \cdot 1\ \Omega = 0{,}5$ V. La diferencia de potencial en los bornes de la segunda pila será $U_2 = \mathcal{E} - Ir_2 = 0{,}25$ V.

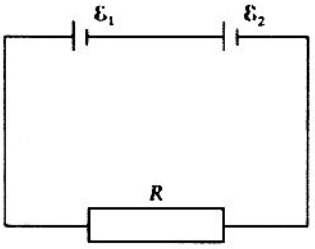


Figura 5-8

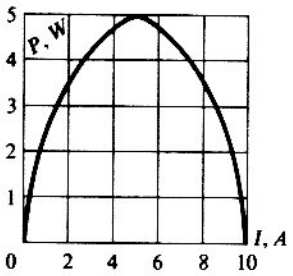


Figura 5-9

Problema 5-9 La Figura 5-9 representa la dependencia entre la potencia útil y la intensidad de la corriente en el circuito. Guiándose por los puntos de esta curva halle: *a*) la resistencia interna de la pila; *b*) la fuerza electromotriz de la pila; *c*) construya un gráfico del rendimiento de esta pila y la caída de potencial en el circuito exterior en función de la intensidad de la corriente de la red.

Solución. Según los puntos de la curva, se halla la siguiente tabla:

I en A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P en W	0	1,8	3,2	4,2	4,8	5	4,8	4,2	3,2	1,8	0

La potencia en el circuito exterior (potencia útil) alcanzará el valor máximo cuando la resistencia exterior sea igual a la interna de la pila. En este caso, la caída de potencial en el circuito exterior será $U = \mathcal{E}/2$, donde $\mathcal{E}$ es la f.e.m. de la pila. De donde el rendimiento de la pila será $\eta = 0{,}5$. En este caso, $P_{max} = IU = 5$ W.

Por consiguiente, $U = P_{max}/I = 5\ \text{V}/5 = 1$ V; de donde la f.e.m. buscada de la pila será $\mathcal{E} = 2U = 2$ V. Como en este caso $I = \mathcal{E}/2r$, la resistencia interna de la pila será $r = \mathcal{E}/2I = 0{,}2\ \Omega$. La caída de potencial del circuito exterior es $U = P/I$; el rendimiento de la pila, $\eta = U/\mathcal{E} = P/\mathcal{E}I$.

Problema 5-10 Un galvanómetro sensible puede medir una corriente del orden de 10^{-10} amperios. *a*) ¿Cuántos millones de electrones cruzan por segundo una sección de un alambre por el cual circula una intensidad de este valor? *b*) ¿Cuál es la velocidad media de los electrones en el conductor si su sección transversal es de 1 milímetro cuadrado? Suponga que hay $8{,}5 \cdot 10^{28}$ electrones libres por metro cúbico del conductor. *c*) ¿Cuánto tiempo, como término medio, es necesario para que un electrón avance una distancia de 1 centímetro a lo largo del conductor?

Solución. *a*. La carga $q = I \cdot t = 10^{-10}$ A. El número de electrones es:

$$n = q/e = \frac{10^{-10}\ \text{C seg}^{-1}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} = 0{,}62 \cdot 10^{9} = 620 \text{ millones de electrones por segundo}$$

b) La velocidad media de los electrones está dada por $I = nevA$, n, electrones libres, de donde:

$$v = \frac{I}{neA} = \frac{10^{-10}\ \text{C seg}^{-1}}{8{,}5 \cdot 10^{28}\ \text{m}^{-3} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2} = 7{,}35 \cdot 10^{-12}\ \text{m/seg}$$

c) El tiempo necesario es: $t = d/v = \dfrac{10^{-2}\ \text{m}}{7{,}35 \cdot 10^{-12}\ \text{m seg}^{-1}} = 0{,}136 \cdot 10^{10}\ \text{seg} = 43{,}200$ años.

Problema 5-11 Una cafetera eléctrica empieza a hervir 15 minutos después de ser encendida. El calor es producido por una bobina de alambre de 6 metros de largo y resistividad uniforme. ¿Cómo se debe adaptar dicha bobina para que empiece a calentar a los 10 minutos? No tenga en cuenta la pérdida de calor al medio ambiente.

Solución. Como la cafetera está conectada a un voltaje fijo V, la cantidad de calor desprendido por la bobina durante un tiempo t está dado por la fórmula:

$$Q = 0{,}24 \frac{V^2}{R} t, \text{ ley de Joule}$$

siendo R la resistencia de la bobina. Como no se tiene en cuenta la pérdida de calor al medio ambiente, se debe considerar que se necesita la misma cantidad de calor en los dos casos para que el agua hierva. Como la cafetera debe hervir a los 10 minutos, entonces $15/R_1 = 10/R_2$, es decir, la resistencia de la bobina se debe disminuir 1,5 veces. Como la resistencia de un alambre es proporcional a su longitud, el alambre de la bobina se debe recortar 1,5 veces.

Problema 5-12 Dos baterías de igual fuerza electromotriz y de diferentes resistencias internas r_1 y r_2 se conectan en serie a una resistencia externa R. ¿Se puede escoger el valor de R de tal manera que la diferencia de potencial en los terminales de la primera batería sea cero?

Solución. La diferencia de potencial en los terminales de la primera batería es cero si $R = r_1 - r_2$. Esto se deduce del siguiente razonamiento: La intensidad de la corriente en el circuito es:

$$I = \frac{2\mathcal{E}}{r_1 + r_2 + R}$$

La diferencia de potencial en los terminales de la primera batería es:

$$V_1 = \mathcal{E} - Ir_1 = \mathcal{E} - 2\frac{r_1\mathcal{E}}{r_1 + r_2 + R} = \frac{(r_2 - r_1 + R)\mathcal{E}}{r_1 + r_2 + R}$$

$V_1 = 0$ si $r_2 - r_1 + R = 0$, es decir, $R = r_1 - r_2$.

Problema 5-13 ¿Es posible que dos baterías de fuerza electromotriz $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$, respectivamente, y de resistencias internas r_1 y r_2 produzcan una corriente más débil cuando se conectan en serie a una resistencia externa R que una de las baterías conectada a la misma resistencia?

Solución. Es posible si $\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1 < r_2/(r_1 + R)$. Si una de las baterías de f.e.m. $\mathcal{E}_1$ y de resistencia interna r_1 se conecta a una resistencia externa R, entonces la corriente que pasa por el circuito es:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + R}$$

Si una segunda batería de f.e.m. $\mathcal{E}_2$ y de resistencia interna r_2 se agrega en serie, la corriente:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2 + R}$$

Ahora, $I_2 < I_1$ si:

$$\frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2 + R} < \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + R}, \quad \therefore \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} < \frac{r_2}{r_1 + R}$$

Es decir, se obtiene esta desigualdad si la resistencia interna de la segunda batería es lo suficientemente grande.

Problema 5-14 Tres baterías idénticas se conectan como lo indica la Figura 5-10. ¿Qué lectura registra el voltímetro (V) si se conecta en paralelo con una de las baterías, en A y B?

Solución. El voltaje entre los puntos A y B debe ser igual a la f.e.m. de la batería menos la caída de potencial que tiene lugar dentro de la misma. La intensidad de la corriente en el circuito es igual a $I = 3\mathcal{E}/3r = \mathcal{E}/r$, siendo $\mathcal{E}$ la f.e.m. de la batería y r su resistencia interna. El voltaje entre los dos puntos A y B es $\mathcal{E} - Ir = \mathcal{E} - \mathcal{E} = 0$. Es decir, el voltímetro conectado a A y B registra 0. La razón de esto es: si los terminales de la batería están en corto circuito, la caída interna de potencial es igual a la f.e.m. de la batería y el potencial en los terminales de la batería es cero. En este caso, las tres baterías están conectadas en serie por alambres de resistencia nula, que es similar al corto circuito de cada batería. Entonces el potencial en los terminales de cada batería es igual a cero.

La lectura del voltímetro no se altera al aumentar el número de baterías si continúan conectados a los puntos A y B.

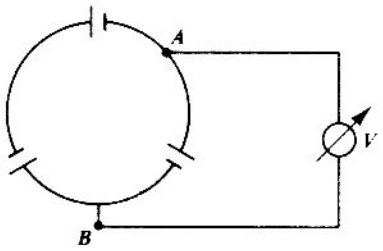


Figura 5-10

Problema 5-15 ¿En qué condiciones la intensidad de una corriente es igual en un alambre si se conectan n baterías en serie y en paralelo?

Solución. Para la conexión en serie:

$$I_1 = \frac{n\mathcal{E}}{nr + R} = \frac{\mathcal{E}}{r + \frac{R}{n}}$$

siendo $\mathcal{E}$ la f.e.m. de cada batería, r la resistencia de cada una de ellas y R la resistencia externa.

Para la conexión en paralelo:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{\frac{r}{n} + R}$$

Obviamente, $I_2 = I_1$ si $r = R$, es decir, si la resistencia del alambre es igual a la resistencia interna de una de las baterías.

Problema 5-16 Los alambres $MACN$ y $MBDN$, de la misma longitud, pero de resistencias diferentes R_1 y R_2, se conectan como lo indica la Figura 5-11. ¿Cómo se deben ordenar los contactos A, B, C y D para que no pase corriente por los alambres AB y CD? ¿Pasa corriente por AB y CD con esta ordenación de los contactos si se conectan los puntos E y F sobre los alambres?

Solución. Como los alambres $MACN$ y $MBDN$ se conectan en paralelo entre los puntos M y N, la caída de potencial es la misma para toda la longitud de los alambres. La caída de potencial se distribuye uniformemente a lo largo de estos alambres.

Si $MA = MB$, los potenciales en A y B son iguales y la corriente no pasa por el alambre AB. Lo mismo se puede decir para MC y MD. Si son de la misma longitud, no pasa corriente por CD. Los alambres AB y

CD están a potenciales diferentes si los puntos E y F se conectan, pasa corriente por EF y, por tanto, a lo largo de AE, BE y FD. No importa la posición de los puntos E y F en los alambres AB y CD, puesto que el potencial en E es siempre mayor que en F.

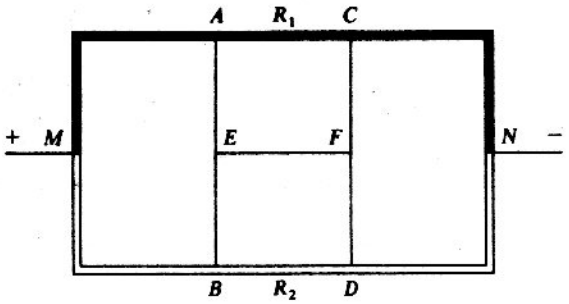


Figura 5-11

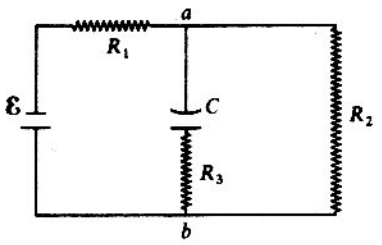


Figura 5-12

Problema 5-17 Una batería de fuerza electromotriz $\mathcal{E}$ se conecta a un sistema como lo indica la Figura 5-12. ¿A qué voltaje se carga finalmente el condensador? No tenga en cuenta la resistencia interna de la batería.

Solución. La batería $\mathcal{E}$ carga el condensador a un determinado voltaje V, después de lo cual el flujo de corriente por C y R_3 se detiene y continúa únicamente por el circuito que pasa por R_1 y R_2. Cuando se detiene la corriente por el circuito del condensador no hay caída de potencial en la resistencia R_3 y la diferencia de potencial del condensador debe ser igual a la existente entre los puntos a y b. Según la ley de Ohm:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}$$

Esta corriente crea una diferencia de potencial en los extremos de la resistencia R_2, es decir, entre los puntos a y b de:

$$V = IR_2 = \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 + R_2}$$

que es el potencial al cual se carga el condensador C.

Problema 5-18 Resistencias puras se montan como lo indica la Figura 5-13. Calcule: *a*) La resistencia equivalente de la parte BC del circuito. *b*) Los dos generadores tienen una resistencia interna r, calcule el valor de la resistencia x para que la potencia disipada entre los puntos A y B sea máxima. *c*) ¿Cuál es la potencia máxima? Aplicación numérica:

$$R = 1\ \Omega,\quad r = 3\ \Omega,\quad E = 6\ \text{V}$$

Solución. *a*) Cálculo de la resistencia equivalente: Parte BD:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R} \quad \therefore R_1 = \frac{2R}{3}$$

Parte CDB:

$$R_2 = R_1 + R = \frac{2}{3}R + R = \frac{5}{3}R$$

La resistencia equivalente total es:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{3R} = \frac{3}{5R} + \frac{1}{3R} = \frac{14}{15R} \quad \therefore R' = \frac{15}{14}R$$

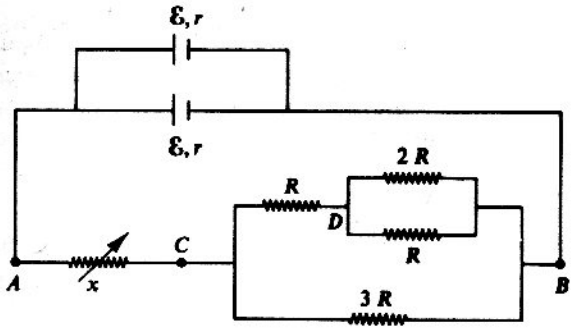


Figura 5-13

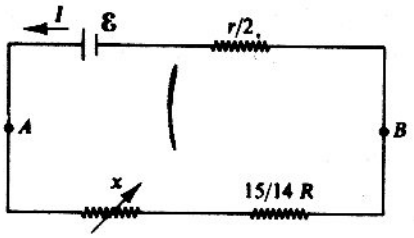


Figura 5-14

b) Dados n generadores idénticos de f.e.m. $\mathcal{E}$ y de resistencia interna r acoplados en paralelo, se dice que el generador equivalente a ellos llevará: para la f.e.m., $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$; para la resistencia interna, $r' = r/n$.

El montaje equivalente del circuito se da en la Figura 5-14. La potencia disipada en la parte AB es:

$$P = \left(x + \frac{15}{14} l\right) I^2$$

La corriente I que recorre el circuito es:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\left(\frac{r}{2} + x + \frac{15}{14} R\right)}$$

De donde:

$$P = \frac{\mathcal{E}^2 \left(x + \frac{15}{14} R\right)}{\left(x + \frac{r}{2} + \frac{15}{14} R\right)^2}$$

Para determinar el máximo de P hay que calcular la derivada dP/dx, que es nula en los puntos extremos de P:

$$\frac{dP}{dx} = \mathcal{E}^2 \left[\frac{\left(x + \frac{r}{2} + \frac{15}{14} R\right)^2 - 2\left(x + \frac{15}{14} R\right)\left(x + \frac{r}{2} + \frac{15}{14} R\right)}{\left(x + \frac{r}{2} + \frac{15}{14} R\right)^4} \right] = \mathcal{E}^2 \frac{\frac{r}{2} - x - \frac{15}{14} R}{\left(x + \frac{r}{2} + \frac{15}{14} R\right)^3}$$

La derivada se anula para $x = \frac{r}{2} - \frac{15}{14} R$. El valor de la resistencia x que corresponde a una potencia disipada máxima es: $x = \frac{r}{2} - \frac{15}{14} R$. La condición de validez es:

$$R < \frac{7}{15} r$$

c) La potencia máxima es:

$$P = \mathcal{E}^2 \frac{r/2}{r^2} = \frac{\mathcal{E}^2}{2r}$$

Aplicación numérica: $R = \frac{15}{14}\,\Omega$, $x = \frac{27}{28}\,\Omega$, $P = 6$ W.

Problema 5-19 Cinco baterías de 1,2 voltios y de resistencia interna 0,3 ohmios cada una se conectan en serie. *a*) ¿Cuál es la fuerza electromotriz y la resistencia interna de la batería equivalente? *b*) ¿Cuál es la fuerza electromotriz y la resistencia interna de una batería equivalente a una asociación formada por 5 pilas de 1,5 voltios conectadas en paralelo si la resistencia interna de cada pila es de 0,12 ohmios?

Solución. *a*) Como las baterías están conectadas en serie, la f.e.m. total es la suma de las f.e.m. y $5 \cdot 1{,}2\ \text{V} = 6\ \text{V}$. La resistencia total es de $5 \cdot (0{,}3)\ \Omega = 1{,}5\ \Omega$ por estar en serie.

b) Como las pilas están en paralelo, la f.e.m. de la batería es igual a la f.e.m. de cada pila, 1,5 V. La resistencia de la batería es:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{0{,}12} + \frac{1}{0{,}12} + \frac{1}{0{,}12} + \frac{1}{0{,}12} + \frac{1}{0{,}12} = \frac{5}{0{,}12} = 41{,}7\ \Omega$$

Problema 5-20 Se tiene una bobina de resistencia desconocida R, y se quiere medir por medio de un puente de hilo dicha resistencia. Cuando se coloca en serie con una resistencia de 8 ohmios, el galvanómetro indica cero cuando las longitudes del alambre separado por la conexión a dicho galvanómetro son de 0,5 y 0,2 metros, respectivamente. ¿Cuál es la resistencia de R? (Vea Fig. 5-15.)

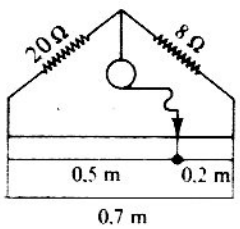


Figura 5-15

Solución. Empleando la fórmula del puente de hilo se obtiene:

$$\frac{R}{8\ \Omega} = \frac{0{,}5\ \text{m}}{0{,}2\ \text{m}} \qquad \therefore\ R = \frac{8 \cdot (0{,}5)}{0{,}2}\ \Omega = 20\ \Omega$$

Problema 5-21 Halle la corriente que pasa por el circuito de la Figura 5-16.

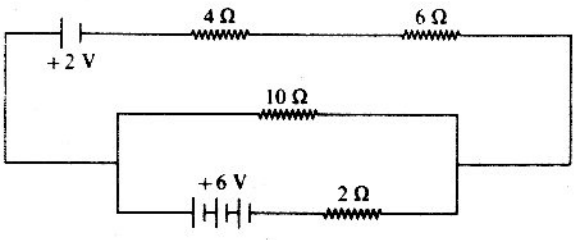


Figura 5-16

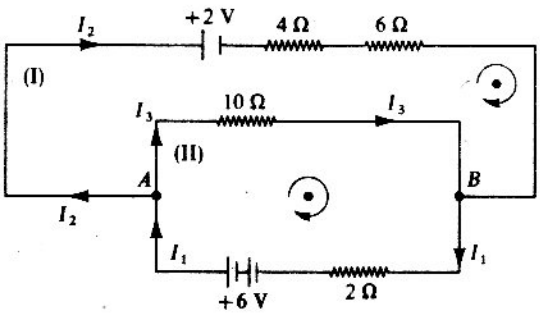


Figura 5-17

Solución. Vemos que tenemos en esta red dos nudos, A y B, y dos mallas, (I) y (II).

Primero damos un sentido arbitrario de recorrido a las mallas, el de las agujas del reloj. Segundo, marcamos un sentido cualquiera para las intensidades de cada rama, por ejemplo, el señalado en la Figura 5-17. Tercero, aplicamos las dos leyes de Kirchhoff:

En el nudo A:	$I_1 = I_2 + I_3$	1.ª Ley
En la malla (I):	$-2 = 4I_2 + 6I_2 - 10I_3 = 10I_2 - 10I_3$	2.ª Ley
En la malla (II):	$6 = 10I_3 + 2I_1$	3.ª Ley

con lo cual tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y podemos resolverlo.

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (1)$$
$$-2 = 10I_2 - 10I_3 \quad (2)$$
$$6 = 10I_3 + 2I_1 \quad (3)$$

De (1) en (3):

$$6 = 10I_3 + 2(I_2 + I_3) = 12I_3 + 2I_2$$
$$6 - 2I_2 = 12I_3;\ 3 - I_2 = 6I_3$$

luego:

$$I_2 = 3 - 6I_3 \quad (4)$$

Llevando (4) a (2):

$$-2 = 30 - 60I_3 - 10I_3 = 30 - 70I_3$$
$$70I_3 = 32;\ I_3 = \frac{32}{70}$$

luego:

$$I_3 = \frac{16}{35}\ \text{A}$$

Llevando este valor de I_3 a (4):

$$I_2 = 3 - 6 \cdot \frac{16}{35} = 3 - \frac{96}{35} = \frac{105 - 96}{35} = \frac{9}{35}$$

luego:

$$I_2 = \frac{9}{35}\ \text{A}$$

Sustituyendo los valores de I_2 e I_3 en (4):

$$I_1 = \frac{9}{35} + \frac{16}{35} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$$

luego:

$$I_1 = \frac{5}{7}\ \text{A}$$

El signo positivo indica que las corrientes fluyen en las direcciones escogidas. Si el signo de la corriente es negativo, esto indica que la corriente fluye en la dirección opuesta a la seleccionada.

Problema 5-22 Halle el valor de R en el circuito de la Figura 5-18.

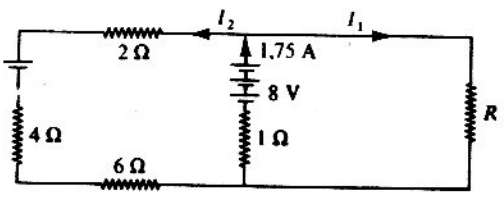


Figura 5-18

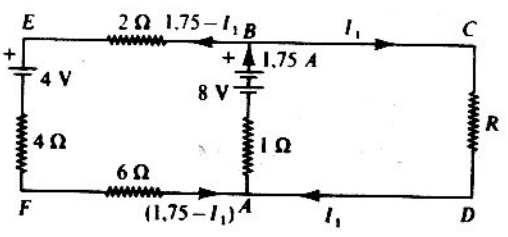


Figura 5-19

Solución. Si dibujamos las corrientes en el diagrama de la Figura 5-19 vemos que la corriente de B a E, (I_2), es $1{,}75 - I_1$, porque en el punto B, $1{,}75 = I_1 + I_2$.

Alrededor del circuito $ABCDA$:

$$8 - I_1R - 1{,}75(1) = 0 \tag{1}$$

Alrededor del circuito $ABEFA$:

$$8 - 2(1{,}75 - I_1) - 4 - 4(1{,}75 - I_1) - 6(1{,}75 - I_1) - 1{,}75(1) = 0$$

de donde:

$$I_1 = 18{,}75/12 = 1{,}56 \text{ A}$$

Entonces, remplazando en la ecuación (1), se obtiene:

$$8 - 1{,}56R - 1{,}75(1) = 0 \quad \therefore R = 6{,}25/1{,}56 = 4\,\Omega$$

Problema 5-23 La Figura 5-20 muestra una pila con una fuerza electromotriz E_1, igual a 2,1 voltios. $E_2 = 1{,}9$ voltios, $R_1 = 45$ ohmios, $R_2 = 10$ ohmios y $R_3 = 10$ ohmio. Halle la intensidad de la corriente en todas las derivaciones del circuito. Se desprecian las resistencias internas de las pilas.

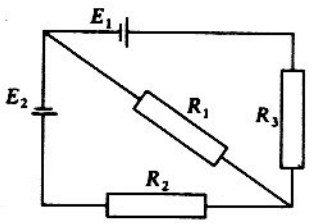


Figura 5-20

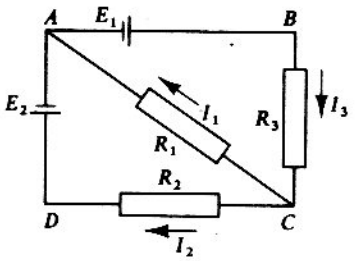


Figura 5-21

Solución. Apliquemos la ley de Kirchhoff al circuito bifurcado del problema. La Figura 5-21 muestra el sentido de las corrientes dado arbitrariamente.

Supongamos que las corrientes fluyen según indican las flechas trazadas por nosotros. Según la primera ley de Kirchhoff, para el nudo C tenemos que

$$I_3 = I_1 + I_2 \tag{1}$$

Para el punto A tendremos una ecuación idéntica. Según la segunda ley de Kirchhoff, para la malla ABC tenemos que:

$$I_3R_3 + I_1R_1 = E_1 \tag{2}$$

para el contorno ACD:

$$-E_2 = -I_1R_1 + I_2R_2 \tag{3}$$

o lo que es lo mismo:

$$I_1R_1 - I_2R_2 = E_2$$

En vez del contorno ACD o del contorno ABC se podía haber considerado el contorno $ABCD$. Tenemos tres ecuaciones y tres incógnitas, I_1, I_2 e I_3. Al resolver los problemas aplicando las leyes de Kirchhoff es conveniente escribir las ecuaciones (1), (2) y (3) con los respectivos valores numéricos. Para el problema, las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} I_3 &= I_1 + I_2 \\ 10I_3 + 45I_1 &= 2{,}1 \\ 45I_1 - 10I_2 &= 1{,}9 \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene: $I_1 = 0{,}04$ A, $I_2 = -0{,}01$ A e $I_3 = 0{,}03$ A. El signo negativo de la corriente I_2 indica que el sentido que le habíamos atribuido no es el verdadero. La corriente I_2 fluirá, en realidad, desde D hacia C y no como lo habíamos considerado al escribir las ecuaciones.

Problema 5-24 La Figura 5-22 muestra resistencias de 2, 5 y 3 ohmios conectadas en paralelo a una fuente de 12 voltios. Halle: *a*) la resistencia equivalente; *b*) el amperaje del circuito; *c*) el amperaje de cada resistencia; *d*) la caída de voltaje en cada resistencia.

Solución. *a*) La resistencia equivalente es:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{15 + 6 + 10}{30} = \frac{31}{30} \quad \therefore R = \frac{30}{31}\,\Omega$$

b) El amperaje en el circuito es:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{12\text{ V}}{30/31} = \frac{372}{30}\text{ A} = 12{,}4\text{ A}$$

c) El voltaje a que está sometida la ordenación en paralelo es de 12 V.

Como el amperaje en cada resistencia es función de la magnitud de cada una de las resistencias, entonces:

$$I_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{12}{2} = 6\text{ A};\quad I_5 = \frac{V}{R_5} = \frac{12}{5} = 2{,}4\text{ A};\quad I_3 = \frac{V}{R_3} = \frac{12}{3} = 4\text{ A}$$

El amperaje total entre A y B es:

$$I = I_2 + I_5 + I_3 = 6\text{ A} + 2{,}4\text{ A} + 4\text{ A} = 12{,}4\text{ A}$$

d) La caída de voltaje en cada resistencia es de 12 V.

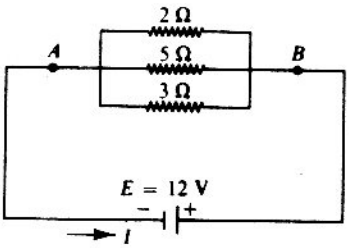


Figura 5-22

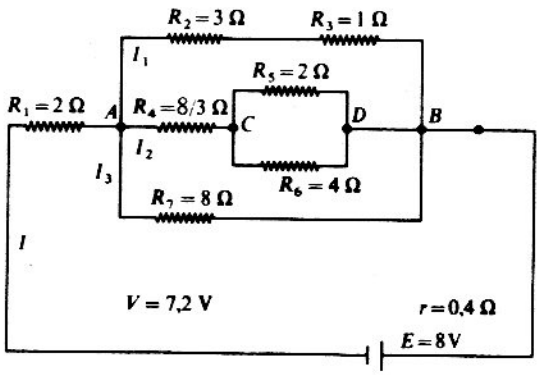


Figura 5-23

Problema 5-25 *a*) Halle la resistencia equivalente del circuito que se da en la Figura 5-23; *b*) la resistencia total en el circuito; *c*) el amperaje en el circuito; *d*) la caída de voltaje en R_5.

Solución. *a*) La resistencia equivalente del circuito externo se puede hallar de la siguiente manera:

1. La resistencia equivalente a R_5 y R_6 es:

$$\frac{1}{R_{5,6}} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \therefore R_{5,6} = \frac{4}{3}\,\Omega$$

2. $R_{5,6}$ está en serie con R_4:

$$\therefore R_{4,5,6} = R_{5,6} + R_4 = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4\,\Omega$$

R_2 está en serie con R_3:

$$R_{2,3} = 3\,\Omega + 1\,\Omega = 4\,\Omega$$

3. $R_{2,3}$, $R_{4,5,6}$ y R_7 están en paralelo:

$$\therefore \frac{1}{R_{2,3,4,5,6,7}} = \frac{1}{R_{2,3}} + \frac{1}{R_{4,5,6}} + \frac{1}{R_7} = \frac{5}{8} \quad \therefore R_{2,3,4,5,6,7} = 1{,}6\,\Omega$$

4. Finalmente, $R_{2,3,4,5,6,7}$ está en serie con R_1:

$$\therefore R_e = R_{2,3,4,5,6,7} + R_1 = 1{,}6 + 2 = 3{,}6\,\Omega$$

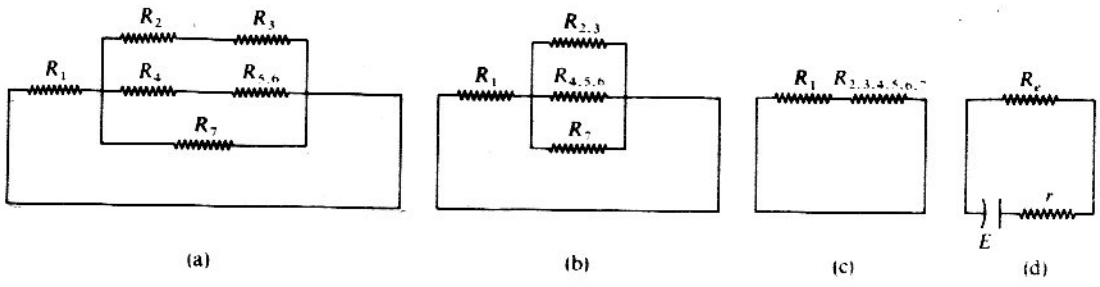


Figura 5-24

b) La resistencia total en el circuito debe incluir la resistencia de la batería que está en serie con R_e; entonces:

$$R = R_e + r = 3{,}6 + 0{,}4 = 4\,\Omega$$

c) El amperaje en el circuito es: $I = \dfrac{E}{R} = \dfrac{8}{4} = 2$ A.

d) La caída de voltaje en R_5 se puede calcular de la siguiente manera:

1. La resistencia total entre AB es 1,6 Ω; luego la diferencia de potencial entre estos dos puntos será:

$$V_{AB} = IR = 2 \cdot 1{,}6 = 3{,}2\ \text{V}$$

2. La resistencia total en la rama central del grupo en paralelo, la 2.ª, donde está R_5, es 4 Ω; luego el amperaje I_2 (o lo que es lo mismo, el amperaje que hay en los tramos AC y DB) será:

$$I_2 = \frac{V_{AB}}{R_{4,5,6}} = \frac{3{,}2}{4} = 0{,}8\ \text{A}$$

3. Al llegar esta corriente de 0,8 A al grupo en paralelo, R_5, R_6, en el punto C, se separa en dos corrientes proporcionales a las resistencias. La que pasa por R_5 tendrá una intensidad de corriente proporcional al potencial V_{CD}, que es el que nos piden, siendo al que están sometidas las dos resistencias R_5 y R_6, de valor:

$$V_{CD} = I_2 \cdot R_{5,6} = 0{,}8\ \text{A} \cdot \frac{4}{3}\,\Omega = 1{,}07\ \text{V}$$

e inversamente proporcional a R_5; luego:

$$I_{R_5} = \frac{1{,}07}{2} = 0{,}535\ \text{A}$$

Problema 5-26 Tres baterías de 3 voltios y de resistencias internas 0,1, 0,2 y 0,3 ohmios se conectan en paralelo y en serie con una resistencia de 2 ohmios. Halle: *a*) la resistencia equivalente para el circuito; *b*) el voltaje equivalente; *c*) la corriente en el circuito; *d*) el voltaje final de la pila equivalente; *e*) la corriente que produce cada pila; *f*) el voltaje final para cada pila.

Solución. La resistencia equivalente es:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{0,1} + \frac{1}{0,2} + \frac{1}{0,3} = \frac{0,06 + 0,03 + 0,02}{0,006} = \frac{0,11}{0,006} \quad \therefore\ r = 0,054\ \Omega;\ R = 0,054 + 2 = 2,054\ \Omega$$

b) El voltaje equivalente es de 3 V.

c) La corriente en el circuito es de $I = V/R = \frac{3}{2,054} = 1,4$ A.

d) El voltaje final para la pila equivalente es:

$$V = E - Ir = 3 - 1,4(0,054) = 2,9244\ \text{V}$$

e) Observe que la caída de Ir en todas las pilas debe ser igual. La caída de voltaje debida a la corriente y la resistencia interna equivalente, en una ordenación en paralelo, deben ser todas iguales. Entonces, $V = Ir = 1,4(0,054) = 0,0756$ V.

$$\therefore\ I_{0,1} = \frac{0,0756}{0,1} = 0,756\ \text{A};\quad I_{0,2} = \frac{0,0756}{0,2} = 0,378\ \text{A};\quad I_{0,3} = \frac{0,0756}{0,3} = 0,252\ \text{A}$$

f) El voltaje final para cada pila es el mismo que en *d*).

Problema 5-27 Entre los puntos A y B de la Figura 5-25 hay conectada una batería de 18 voltios. Halle la corriente en las resistencias del sistema.

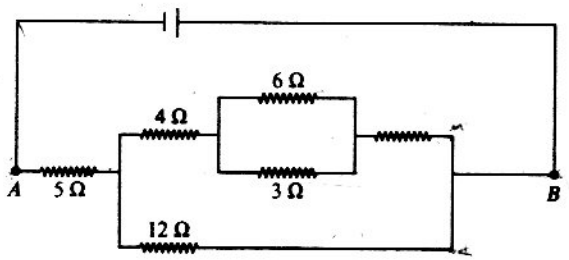


Figura 5-25

Solución. Calculamos primero la resistencia equivalente del sistema dado, y a partir de ella, como se muestra en la Figura 5-26, vamos calculando y desdoblándola hasta llegar al circuito problema. Empezando con (e), la corriente en la resistencia de 9 Ω es 2 A. Pasando al circuito (d), la corriente sigue siendo de 2 A. De $V = IR$ vemos que la caída de voltaje a través de la resistencia de 4 Ω es de 8 V, que también es la caída de voltaje a través de la combinación en paralelo de la parte (c).

En la parte (c) vemos que la caída de voltaje a través de la resistencia de 6 Ω es 8 V. Como resultado de esto, la corriente que pasa por ella es de 8 V/6 Ω = 4/3 A. La resistencia de 6 Ω es la combinación en serie de las resistencias de 4 Ω y 2 Ω que se muestran en la parte (b). La caída de voltaje a través de la resistencia de 2 Ω es $V = IR = 8/3$ V. Como resultado de esto, la diferencia de voltaje entre los puntos E y F es 8/3 V, que también es la caída de voltaje a través de la resistencia de 3 Ω. Entonces, según la ecuación $V = IR$, la corriente que pasa por la resistencia de 3 Ω es 8/9 A.

La corriente en las demás resistencias se calcula en forma análoga.

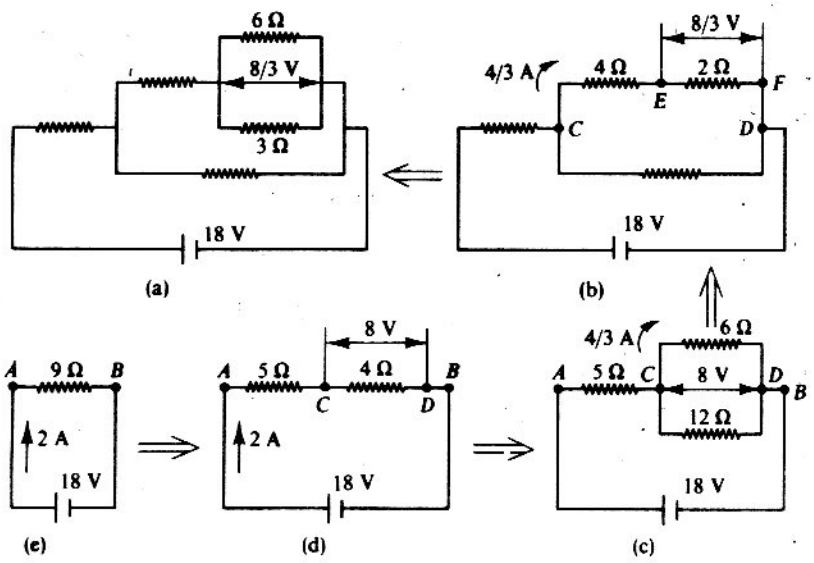


Figura 5-26

Problema 5-28 Halle las corrientes desconocidas que se indican en la Figura 5-27, empleando las leyes de Kirchhoff.

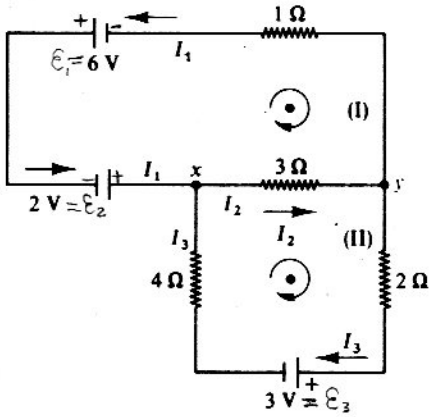


Figura 5-27

Solución. *a*) Vemos que tenemos dos mallas, la I y la II, además de que están relacionadas con dos nudos, el x y el y.

b) Como tenemos dos mallas y dos nudos nos basta con una sola ecuación para la primera ley de Kirchhoff; por ejemplo, en el nudo x:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

c) Damos un sentido arbitrario de recorrido de las mallas, por ejemplo, el de las agujas del reloj.

d) Supongamos una dirección cualquiera para la corriente a cada hilo, por ejemplo, el que se da en la Figura 5-27.

e) Aplicamos la segunda ley de Kirchhoff a las dos mallas.

$$\begin{cases} 6 + 2 - I_1 - 3I_2 = 0 \\ 3 + 3I_2 + 2I_3 + 4I_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{I:} \quad -6 - 2 = -I_1 - 3I_2; \quad +8 = +I_1 + 3I_2$$

$$\text{II:} \quad -3 = 3I_2 + 2I_3 + 4I_3; \quad -3 = 3I_2 + 6I_3$$

f) Ahora tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \\ 8 &= I_1 + 3I_2 \\ -3 &= 3I_2 + 6I_3 \end{aligned}\right\}$$

Resolviéndolo obtenemos:

$$I_1 = 3\text{ A};\ I_2 = \frac{5}{3}\text{ A};\ I_3 = -\frac{4}{3}\text{ A}$$

El signo menos de I_3 indica que el sentido real de esta intensidad de corriente es contrario al señalado arbitrariamente en el dibujo. No confunda la dirección de la corriente con la dirección que se le da previamente. Una vez resuelto el problema se cambia el sentido a aquellas intensidades que hemos obtenido con signo menos.

Problema 5-29 Una resistencia de 10 ohmios está conectada a los bornes de una batería de fuerza electromotriz 20 voltios cuya resistencia interna es 0,1 ohmio. El punto C está unido a tierra. *a*) ¿Cuál es el sentido de la corriente en la batería y en el circuito exterior? *b*) ¿Cuántos culombios por segundo saldrán del borne positivo de la batería y cuántos culombios entrarán por el borne negativo? *c*) Calcule los potenciales en los puntos A, B, C y D. *d*) Calcule la diferencia de potencial V_{AD} entre los bornes de la batería y V_{BC} entre los bornes de la resistencia. *e*) ¿Cuál es la intensidad de la corriente en el conductor que une a C con tierra? (Vea Fig. 5-28.)

Solución. *a*) El sentido de la corriente (convencional) en la batería es del punto D al punto A y en el circuito exterior del punto A al punto D.

b) Según la ecuación del circuito en serie: $I = E/(R + r)$; la carga eléctrica por unidad de tiempo que entra al borne negativo es:

$$I = E/(R + r) = 20/(10 + 0{,}1) = \frac{20}{10{,}1} = 1{,}98\text{ C/seg} \approx 2\text{ A}$$

c) El potencial en A y B es el mismo; entonces: $V_A = V_B = IR = 2\text{ A} \cdot 10\ \Omega = 20$ V; y en los puntos C y D: $V_C = V_D = 0$, por estar en contacto con tierra.

d) La diferencia de potencial: $V_A - V_D = V_{AD} = 20$ V.
La diferencia de potencial: $V_B - V_C = V_{BC} = 20$ V.

e) La intensidad de la corriente en el conductor que une el punto C a tierra es: $I = V_C/R = 0/10 = 0$.

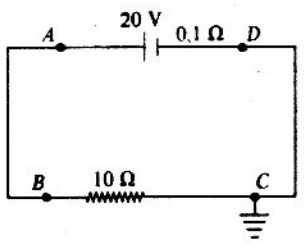


Figura 5-28

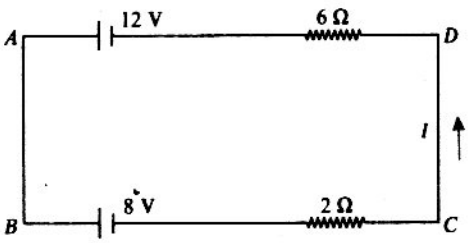


Figura 5-29

Problema 5-30 Halle la corriente en el circuito de la Figura 5-29, la potencia de salida de cada batería y la potencia disipada en cada resistencia.

Solución. Como las baterías de 12 y 8 V son opuestas, las dos son equivalentes a una de 4 V. La batería de 12 V hace que la corriente fluya en la dirección contraria a las manecillas del reloj. Su magnitud es 4 V/8 Ω = 1/2 A. Este resultado se puede comprobar empleando las leyes de Kirchhoff. Suponiendo circula

la corriente en el sentido contrario al de las agujas del reloj: Aplicamos la segunda ley de Kirchhoff, que es la única que nos hace falta en este caso. Empezamos a recorrer el circuito a partir del punto A en el sentido de las agujas del reloj, con lo cual se va del lado (+) al (−) en la batería de 12 V, y tenemos, por tanto, −12 V (por convenio, al recorrer el circuito mediante el sentido prefijado, una f.e.m. será positiva si entramos en ella por el polo negativo y salimos por el positivo; será negativa en caso contrario). Al pasar por la resistencia de 6 Ω la recorremos en sentido contrario al que tiene asignado la corriente que pasa por ella, con lo cual la caída de potencial será negativa, $-6I$. Así seguimos hasta volver a A, obteniendo:

$$8\text{ V};\ -2I$$

luego:

$$8 - 12 = -6I - 2I$$

$$-4 = -8I \quad \therefore I = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Si hubiéramos tomado como sentido de la corriente el de las agujas del reloj nos habría salido la intensidad con signo negativo, lo cual nos indicaría que el sentido verdadero es el contrario al de las agujas del reloj.

La batería de 12 V transmite potencial $P = VI$ al circuito en la cantidad 6 W. La batería de 8 V se carga; entonces comunica potencia en la cantidad 4 W.

La potencia que se disipa en las resistencias es:

$$I^2R = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} 6 = 2\text{ W}$$

Observe que la potencia consumida es 2 + 4 = 6 W, que es exactamente la cantidad de potencia que transmite al circuito la batería de 12 V.

Problema 5-31 Se conecta una pila a un circuito que produce una corriente I_1. Después se une una segunda pila en serie con la primera y se produce una corriente I_2. Si se conectan las pilas en paralelo, la corriente que pasa por el circuito es I_3. Muestre que la relación que existe entre las corrientes es: $3I_2I_3 = 2I_1(I_2 + I_3)$.

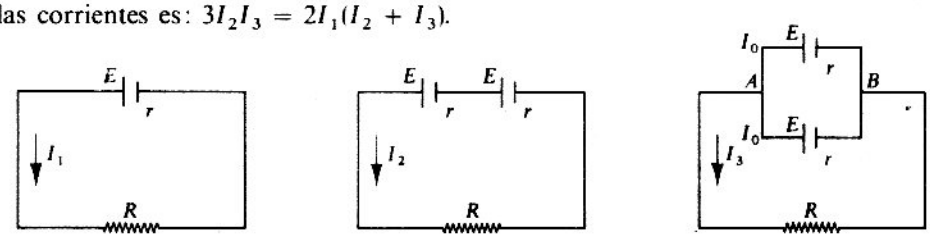


Figura 5-30

Solución. Sea E la f.e.m. de una cualquiera de las pilas, r su resistencia interna y R la resistencia externa del circuito. Empleando una sola pila, la ecuación del circuito es: $I_1 = E/(R + r)$.

Conectando dos pilas en serie, su f.e.m. actúa en el mismo sentido e $I_2 = 2E/(R + 2r)$. Cuando las pilas se conectan en paralelo, por simetría la misma corriente I_0 pasa por cada pila. Como no se acumula carga en el punto A del circuito:

$$I_3 = I_0 + I_0 = 2I_0$$

Si pasa corriente por cualquier pila del circuito: $V_{AB} = E - I_0 \cdot r = E - \frac{I_3}{2} r$. Cuando se considera el paso de la corriente por el circuito externo, $V_{AB} = I_3R$. Por tanto, $E = I_3(R + r/2)$. Reescribiendo las tres ecuaciones, se obtiene:

$$R + r = E/I_1, \quad R + 2r = 2E/I_2, \quad R + r/2 = E/I_3$$

de donde:

$$R = 2E(1/I_1 - 1/I_2) \quad \text{y} \quad R = E(2/I_3 - 1/I_1)$$

Dividiendo miembro a miembro las dos últimas ecuaciones se obtiene:

$$1 = \frac{2[1/I_1 - 1/I_2]}{2/I_3 - 1/I_1} \quad \therefore 2I_1I_2 - I_2I_3 = 2I_2I_3 - 2I_1I_3 \quad \therefore 3I_2I_3 = 2I_1(I_2 + I_3)$$

Problema 5-32 Para el circuito que se muestra en la Figura 5-31 halle el voltaje de la batería E. El amperímetro se puede considerar perfecto, es decir, sin resistencia, e indica que la corriente es de 1/2 amperio en la dirección señalada.

Solución. Primero se asigna una corriente a todos los alambres. La corriente resulta negativa si se le asigna una dirección equivocada. En el diagrama se han indicado con I_1 e I_2.

La corriente es I_2 en $PABC$, $\frac{1}{2}$ A en $CDFP$ e I_1 en CP. Según la primera ley de Kirchhoff aplicada al punto P se obtiene:

$$1/2 + I_1 - I_2 = 0$$

Escribiendo la ecuación del circuito para la trayectoria $CDFPC$ se obtiene $-E - \frac{1}{2}(2) + 4I_1 + 12 = 0$, puesto que el amperímetro es de resistencia cero. En forma análoga para la trayectoria $CBAPC$: $-4 + 6I_2 + 4I_1 + 12 = 0$.

Resolviendo las tres ecuaciones anteriores, en forma simultánea, se obtiene:

$$I_1 = -\frac{11}{10} = -1{,}1 \text{ A}; \quad I_2 = -\frac{3}{5} = -0{,}6 \text{ A}; \quad E = 6{,}6 \text{ V}$$

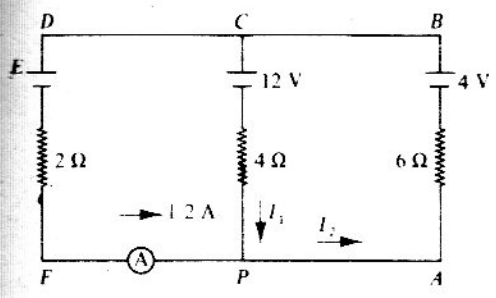


Figura 5-31

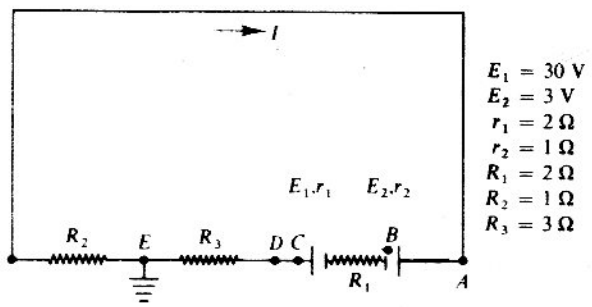


Figura 5-32

Problema 5-33 Para la Figura 5-32 calcule: *a*) la intensidad de la corriente del circuito; *b*) los potenciales en los puntos A, B, C y D; *c*) las diferencias de potencial V_{AB} y V_{DC} entre los bornes de la batería.

Solución. *a*) Aplicando la ecuación del circuito $I = \frac{\Sigma E}{\Sigma R}$ y teniendo en cuenta que $E_1 > E_2$, el sentido de la corriente será el mismo que el de las manecillas del reloj. Entonces:

$$I = \frac{30 - 3}{9} = 3 \text{ A}$$

porque $R = R_1 + R_2 + R_3 + r_1 + r_2 = 9\,\Omega$, es decir, la intensidad de la corriente en el circuito es $R = 3$ A.

b) Como E está en contacto con la tierra $V_E = 0$, entonces:

$$V_{AE} = V_A - V_E = \Sigma RI - \Sigma E = (r_1 + r_2 + R_1 + R_3)I - (E_1 - E_2) = 8 \cdot 3 - 27 = -3 \text{ V}$$

por consiguiente, $V_A = -3$ V.

Ahora, $V_{AB} = V_A - V_B = \Sigma RI - \Sigma E = Ir_2 - (-E_2) = 6$ V, y como $V_A = -3$ V, $V_B = V_A - 6 = -3 - 6 = -9$ V.

Análogamente, $V_{CD} = V_C - V_D = \Sigma RI - \Sigma E = Ir_1 - E_1 = 6 - 30$ V $= -24$ V.

Como $V_{DC} = V_D - V_C = 24$ V y $V_D - V_E = IR_3 = 9$ V, entonces $V_D = 9$ V, ($V_E = 0$), de donde $V_C = V_D - 24 = -15$ V.

c) La diferencia de potencial: $V_{AB} = V_A - V_B = \Sigma RI - \Sigma E = Ir_2 - (-E_2) = 3 + 3 = 6$ V.

Análogamente, $V_{CD} = V_C - V_D = \Sigma RI - \Sigma E = Ir_1 - E_1 = -26$ V $\quad \therefore V_{DC} = 24$ V.

Problema 5-34 Una batería de fuerza electromotriz 20 voltios y resistencia interna despreciable se conecta en serie con una resistencia fija de 4 ohmios y con una resistencia variable R. Considere a la batería como la fuente de energía y R como circuito exterior. Si R es igual a: 0 ohmios, 1 ohmio, 4 ohmios, 16 ohmios, 40 ohmios, infinita, calcule para cada valor de R: *a*) la potencia producida por la batería; *b*) la potencia disipada por la resistencia en forma de calor; *c*) la potencia suministrada al circuito exterior. (Vea Fig. 5-33.)

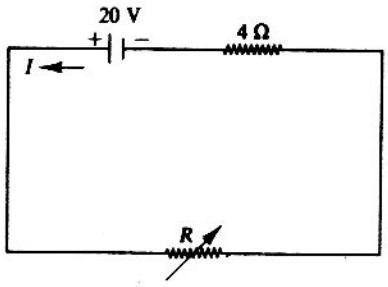


Figura 5-33

Solución. *a*) Para cada valor de R, la potencia producida por la batería es: $P = EI$.

Si $R = 0$, según la ecuación $I = \dfrac{\Sigma E}{\Sigma R}$ la intensidad de la corriente será:

$$I = \frac{20}{R_1} = \frac{20}{4} = 5 \text{ A si } R_1 = 4\ \Omega$$

Entonces: $+P = 5 \cdot 20 = 100$ W.

Si $R = 1\ \Omega$, entonces $I = \dfrac{20}{R_1 + R} = 4$ A y $P = 20 \cdot 4 = 80$ W, y así sucesivamente. Si $R = \infty$, la intensidad $I = \dfrac{\Sigma E}{\Sigma R} = \dfrac{E}{\infty} = 0$.

b) La potencia disipada en forma de calor por la resistencia es $P = I^2R_1$ y si $R = 0$ la intensidad $I = 5$ A; entonces $P = (5)^2 4 = 100$ W.

Si $R = 1\ \Omega$, la intensidad $I = 4$ A; entonces la potencia $P = (4)^2\ 4 = 64$ W, y así sucesivamente. Cuando $R = \infty$, la corriente es de intensidad $I = 0$; entonces $P = I^2R_1 = 0$.

c) La potencia suministrada al circuito exterior es $P = I^2R$. Si $R = 0$, $P = 0$, y si $R = 1\ \Omega$, $I = 4$ A; entonces:

$$P = (4)^2 \cdot 1 = 16 \text{ W}$$

y así sucesivamente. Cuando $R = \infty$, la corriente tiene $I = 0$, y la potencia

$$P = I^2R = 0$$

Problema 5-35 Una bateria de acumuladores de fuerza electromotriz 10 voltios y resistencia interna 0,1 ohmios debe cargarse de una fuente de corriente continua de 110 voltios. *a*) ¿Cuál de los bornes ha de conectarse al hilo positivo de la línea? *b*) ¿Cuál es la intensidad de la corriente de carga si la batería se conecta directamente a la línea? *c*) Halle la resistencia en serie que se necesita para limitar la corriente de carga a 10 amperios. Para esta última resistencia, halle: *d*) la diferencia de potencial entre los bornes de la batería; *e*) la potencia absorbida por la línea.

Solución. *a*) El borne de la batería que ha de conectarse al hilo + de la línea es el borne positivo.

b) Como $E' > E$, el sentido de la corriente es el de la fuente a la batería; entonces:

$$I = \frac{\Sigma E}{\Sigma R} = \frac{E' - E}{r} = \frac{110 - 10}{0{,}1} = \frac{100}{0{,}1} = 1000 \text{ A}$$

c) Si R es la resistencia en serie, entonces la intensidad está dada por:

$$I = \frac{\Sigma E}{\Sigma R} = \frac{E' - E}{r + R} \quad \therefore R = \frac{E' - E - Ir}{I} = \frac{110 - 10 - 10(0{,}1)}{10} = \frac{99}{10} = 9{,}9\ \Omega$$

d) La diferencia de potencial entre los bornes de la batería es:

$$V_{AB} = Ir - (-E) = 10(0{,}1) + 10 = 11\ \text{V}$$

e) La potencia absorbida por la línea es: $P = E'I = 110(10) = 1100$ W.

Problema 5-36 Una pila muy vieja tiene una resistencia interna grande. Un voltímetro indica que su voltaje es de 1,4 voltios y un potenciómetro indica que es de 1,55 voltios. *a*) ¿Cuál es la fuerza electromotriz de la pila; *b*) su resistencia interna; *c*) la corriente que le suministraría a una resistencia de 5 ohmios? Suponga que la resistencia del voltímetro es de 200 ohmios.

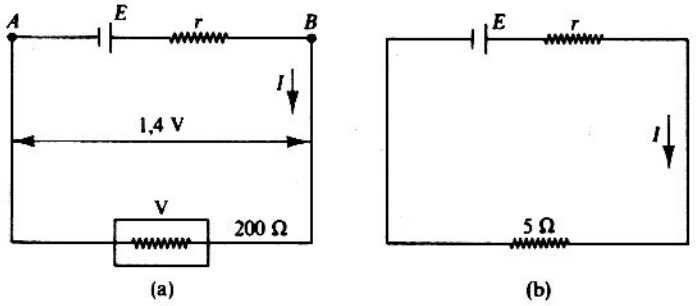


Figura 5-34

Solución. La pila es una fuente de voltaje en serie con la resistencia r. Cuando no se extrae corriente de la pila, el potenciómetro indica la diferencia de voltaje entre sus bornes, que es la f.e.m. de la pila, y como no extrae ninguna corriente de ella, el potenciómetro indica 1,55 V. Cuando se conecta el voltímetro de 200 Ω sale corriente de la batería. El voltímetro indica: $V_B - V_A = 1{,}4$ V. La Figura 5-34(a) muestra que la diferencia de potencial entre A y B es IR. Entonces, $I(200) = 1{,}4$; $\therefore I = 0{,}007$ A.

La ecuación $V_A - V_B = E - Ir$ nos da:

$$1{,}55 - Ir - 200I = 0 \quad \therefore r = 21{,}4\ \Omega$$

Cuando la batería se conecta a la resistencia de 5 Ω, como se muestra en (b), la intensidad de corriente se halla a partir de la ecuación:

$$E - Ir - IR = 0; -1{,}55 - 21{,}4I - 5I = 0 \ = 0{,}059\ \text{A}$$

Problema 5-37 *a*) La potencia máxima que una resistencia de 10^5 ohmios puede disipar, sin elevar demasiado su temperatura, es de 2 vatios. ¿Cuál es la máxima diferencia de potencial que se puede establecer entre los bornes de la resistencia? *b*) Una resistencia de 10^4 ohmios se debe conectar a una diferencia de potencial de 500 voltios. ¿Qué potencia debe disipar la resistencia para no elevar demasiado la temperatura?

Solución. *a*) En virtud de la ecuación $P = V_{AB}^2/R$ se obtiene que la diferencia de potencial es:

$$V_{AB}^2 = PR = 2 \cdot 10^5 \quad \therefore V_{AB} = 440\ \text{V}$$

b) Si la resistencia $R = 10^4\ \Omega$ y $V = 500$ V, la potencia necesaria es:

$$P = V_{AB}^2/R = \frac{(500)^2}{10\,000} = \frac{250\,000}{10\,000} = 25\ \text{W}$$

Problema 5-38 Las resistencias A y B están en paralelo y en serie con la resistencia de 300 ohmios y con una pila seca de fuerza electromotriz 1,5 voltios con resistencia interna despreciable. Cuando B está desconectada de A debe agregarse al circuito una resistencia de 100 ohmios para que la corriente que pasa por A no varíe. Calcule la resistencia de B.

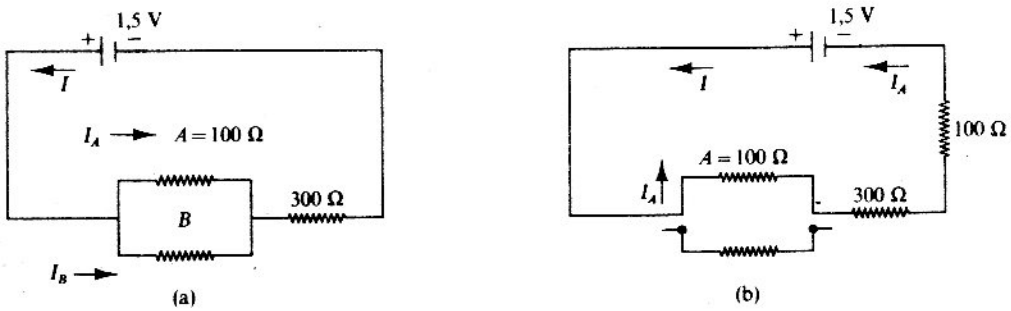


Figura 5-35

Solución. *a*) Si las resistencias A y B están en paralelo, la resistencia equivalente está dada por:

$$1/R_1 = 1/A + 1/B = \frac{1}{100} + \frac{1}{B} = \frac{B + 100}{100B} \quad \therefore R_1 = \frac{100B}{B + 100}$$

La resistencia total del circuito es:

$$R = R_1 + 300 = \frac{100B}{B + 100} + 300 = \frac{400B + 30\,000}{B + 100}$$

y, por tanto, la intensidad de la corriente será:

$$I = \frac{\Sigma E}{\Sigma R} = \frac{1{,}5}{\dfrac{400B + 30\,000}{B + 100}} = \frac{1{,}5(B + 100)}{400B + 30\,000}$$

De la relación $I_B/I_A = A/B$ se obtiene:

$$I_B = (A/B) \cdot I_A = \frac{100I_A}{B}$$

y como $I_A + I_B = I = \dfrac{1{,}5(B + 100)}{400B + 30\,000}$ se obtiene:

$$I_A = \frac{1{,}5B}{400B + 30\,000}, \text{ ya que } I_A = \frac{1{,}5(B + 100)}{400B + 30\,000} - \frac{100I_A}{B} \Rightarrow \frac{I_A(B + 100)}{B} = \frac{1{,}5(B + 100)}{400B + 30\,000}$$

b) Como la resistencia B está desconectada de A [Fig. 5-35(b)], la resistencia equivalente del circuito es:

$R = 100 + 300 + 100 = 500\ \Omega$ y la intensidad será: $I = I_A = E/R = \dfrac{1{,}5}{500}$

Empleando la intensidad I_A calculadas en *a*) y *b*) se obtiene:

$$\frac{1{,}5B}{400B + 30\,000} = \frac{1{,}5}{500} \quad \therefore B = 300\ \Omega$$

Problema 5-39 Tres pilas de fuerza electromotriz E_1, E_2 y E_3 y resistencias internas r_1, r_2 y r_3 se conectan como lo indica la Figura 5-36. Halle la diferencia de potencial entre A y B.

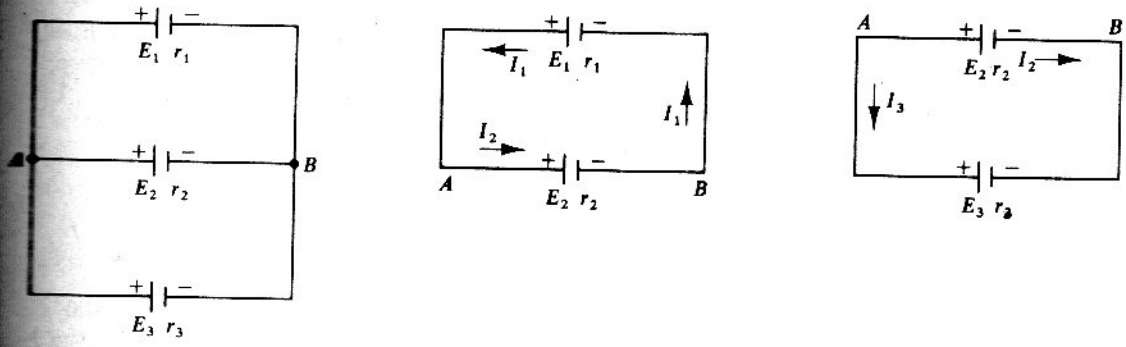


Figura 5-36

Solución. Como las resistencias r_2 y r_3 están conectadas en paralelo, la resistencia equivalente R_1 está dada por:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{r_2 + r_3}{r_2 \cdot r_3} \quad \therefore R_1 = \frac{r_2 \cdot r_3}{r_2 + r_3}$$

R_1 y r_1 están conectadas en serie, entonces la resistencia total equivalente:

$$R = \frac{r_2 \cdot r_3}{r_2 + r_3} + r_1 = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_2 + r_3}$$

Aplicando la ecuación $\Sigma E = \Sigma RI$ se obtiene:

$$-E_1 + E_2 = -I_1 r_1 - I_2 r_2 \quad \text{y} \quad -E_2 + E_3 = I_2 r_2 - I_3 r_3$$

La ecuación correspondiente a la segunda ley de Kirchhoff es:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

De las tres ecuaciones anteriores se encuentra que el valor de I_2 es:

$$I_2 = \frac{-r_3 E_2 - r_1 E_2 + r_1 E_3 + r_3 E_1}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3}$$

Por tanto:

$$V_{AB} = V_A - V_B = I_2 r_2 = \frac{E_1 r_2 r_3 + E_2 r_2 r_3 + E_3 r_1 r_2 - E_2 r_1 r_2}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}$$

Problema 5-40 *a*) Un alambre de níquel tiene una resistividad de $10{,}6 \cdot 10^{-8}$ ohmios · metro a 20° C y un diámetro de 0,05 centímetros. Si el alambre es de 20 metros de largo, ¿cuál es la resistencia del alambre? *b*) Si el alambre de níquel tiene un coeficiente-temperatura de resistencia de 0,006 (° C)$^{-1}$ y si su resistencia es de 70 ohmios a 120° C, ¿cuál es su resistencia a 250° C?

Solución. *a*) La resistencia está dada por:

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{10{,}6 \cdot 10^{-8} \cdot 20 \cdot 4}{\pi(5 \cdot 10^{-4})^2} = 10{,}8\ \Omega, \text{ ya que } A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

b) Como R a t° C está relacionada con R a 0° C por $R_2 = R_0(1 + \alpha t_2)$:

R_2 = resistencia a t_2° C
R_0 = resistencia a 0° C

La resistencia a 0° C es:

$$R_2 = R_0(1 + \alpha t_2) \quad \therefore R_0 = \frac{R_2}{1 + \alpha t_2} = \frac{70}{1 + 0{,}006(120)} = 40{,}7\ \Omega$$

La resistencia a 250° C es:

$$R_1 = 40{,}7(1 + 0{,}006 \cdot 250) = 101{,}7\ \Omega$$

Problema 5-41 Una cafetera contiene dos litros de agua a 20° C y que calienta a 100° C en 2 minutos. La fuente a la cual está conectada es de 180 voltios y un kilovatio hora cuesta 2 centavos. Halle: *a*) la potencia consumida: *b*) el costo de usar la cafetera en estas condiciones; *c*) la resistencia que produce el calor, y *d*) el valor de la corriente.

Solución. *a*) El calor que recibe el agua hasta su punto de ebullición es:

$$Q = mc(t_2 - t_1) = 2 \cdot 10^3\ \text{cm}^3 \cdot 1\ \text{g/cm}^3 \cdot 4{,}18\ \text{J/g} \cdot {}^\circ\text{C}(100 - 20)\ {}^\circ\text{C} = 6{,}69 \cdot 10^5\ \text{J}$$

y si no se tienen en cuenta las pérdidas de calor, ésta es la energía consumida por la cafetera.

La potencia es la energía consumida por segundo, que es:

$$P = \frac{Q}{\tau} = \frac{6{,}69 \cdot 10^5\ \text{J}}{2 \cdot 60\ \text{seg}} = 5{,}5 \cdot 10^3\ \text{J/seg} = 5{,}5\ \text{kW}$$

b) Como la cafetera consume 5,5 kW en dos minutos, el costo es:

$$5{,}5\ \text{kW} \cdot \frac{1}{30}\ \text{h} \cdot 2\ \text{cent/kW} \cdot \text{h} = 0{,}36\ \text{cent}$$

c) Como la potencia consumida es de 5.5 kW y el voltaje que se suministra es de 180 V, y $P = V^2/R$, entonces:

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{180^2\ V^2}{5{,}5 \cdot 10^3\ \text{W}} = 5{,}9\ \Omega$$

d) Como $P = IV$, entonces:

$$I = P/V = \frac{5{,}5 \cdot 10^3\ \text{W}}{180\ \text{V}} = 30{,}5\ \text{A}$$

Problema 5-42 La resistencia de un alambre se mide por medio de un voltímetro y de un amperímetro. Si el voltímetro se conecta a través del alambre, las lecturas que se obtienen son de 40 voltios y 1 amperio. Cuando el voltímetro se conecta a través del amperímetro y el alambre, las lecturas son 50 voltios y 0,9 amperios. La resistencia del voltímetro es 1500 ohmios. Halle la resistencia del alambre y del amperímetro.

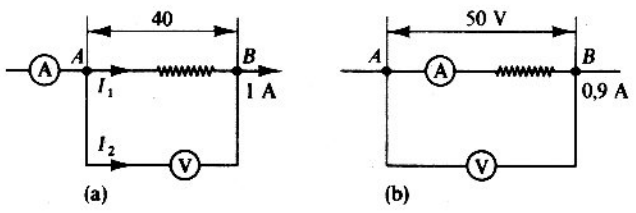


Figura 5-37

Solución. Sea R la resistencia del alambre y r la del amperímetro. La primera conexión se muestra en la Figura 5-37(a). Como no hay acumulación de carga, entonces:

$$I_1 + I_2 = 1\text{ A} \text{ y } V_{AB} = I_1 R = I_2 \cdot 15 \cdot 10^2\,\Omega = 40\text{ V}$$

$$\therefore I_2 = \frac{40\text{ V}}{15 \cdot 10^2\,\Omega} = \frac{2}{75}\text{ A e } I_1 = \left(1 - \frac{2}{75}\right)\text{A} = \frac{73}{75}\text{ A} \quad \therefore R = \frac{40\text{ V}}{\frac{73}{75}\text{ A}} = 41\,\Omega$$

El segundo método de conexión se muestra en la Figura (b). En este caso:

$$50\text{ V} = 0{,}9\text{ A} \cdot (R + r) \quad \therefore r = \frac{50\text{ V}}{0{,}9\text{ A}} - R = (55{,}5 - 41) = 14{,}5\,\Omega$$

Problema 5-43 La disipación de energía en cualquier rama del circuito de la Figura 5-38 no debe exceder a 2 vatios. ¿Cuál es el valor máximo de la fuerza electromotriz de la batería?

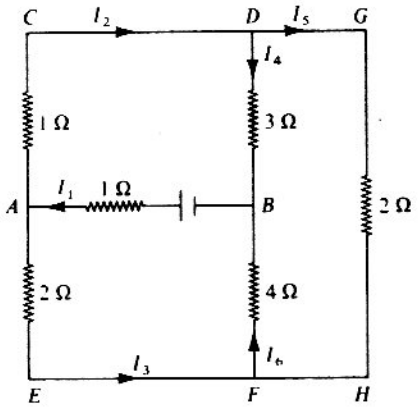


Figura 5-38

Solución. Aplicando la primera ley de Kirchhoff a los puntos A, F y D se obtiene:

$$I_1 = I_2 + I_3, \quad I_3 + I_5 = I_6, \quad I_2 = I_4 + I_5$$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a los circuitos *ACDBA*, *BAEFB* y *DGHFD* se obtiene:

$$\begin{aligned} E &= I_1 \cdot 1 + I_2 \cdot 1 + I_4 \cdot 3 \\ E &= I_1 \cdot 1 + I_3 \cdot 2 + I_6 \cdot 4 \\ O &= I_5 \cdot 2 + I_6 \cdot 4 - I_4 \cdot 3 \end{aligned}$$

Resolviendo simultáneamente las seis ecuaciones anteriores se obtiene la siguiente solución en términos de E. (Verificarlo.)

$$I_1 = \frac{41E}{139},\ I_2 = \frac{26E}{139},\ I_3 = \frac{15E}{139},\ I_4 = \frac{24E}{139},\ I_5 = \frac{2E}{139},\ I_6 = \frac{17E}{139}$$

La potencia disipada en una resistencia R_r por la cual pasa una corriente I_r es $P_r = I_r^2 R_r$. Para los seis elementos de la Figura 5-38 se obtiene:

$$P_{AB} = \frac{1681E^2}{(139)^2};\ P_{AC} = \frac{676E^2}{(139)^2};\ P_{AE} = \frac{450E^2}{(139)^2};\ P_{DB} = \frac{1728E^2}{(139)^2};\ P_{GH} = \frac{8E^2}{(139)^2};\ P_{BF} = \frac{1156E^2}{(139)^2}$$

La potencia máxima que se disipa tiene lugar en la resistencia comprendida entre los puntos B y D. Como P_{DB} es 2 W para un valor máximo de la f.e.m. E, entonces:

$$\frac{1728E^2}{(139)^2\ \Omega} = 2\ \text{W} \quad \therefore\ E^2 = \frac{2\cdot(139)^2}{1728}\ V^2 \quad \therefore\ E = \frac{139\sqrt{2}}{24\sqrt{3}}\ V = 4{,}8\ \text{V}$$

Problema 5-44 Una tostadora eléctrica consume 8 amperios de una fuente de 115 voltios. ¿Qué energía en vatios y kilovatios por segundo consume?

Solución. Vatios = voltios · amperios; luego 115 V · 8 A = 920 W. Para cambiar vatios a kilocalorías por segundo se sabe que vatios = julios por segundo y que 1 kcal = $4{,}186\cdot10^3$ J; por tanto:

$$920\ \text{W} = 920\ \text{J/seg} = \frac{920\ \text{J/seg}}{4{,}186\cdot10^3\ \text{J/kcal}} = 0{,}22\ \text{kcal/seg}$$

Problema 5-45 Un motor consume 100 amperios de una fuente de 220 voltios. Si su eficiencia es del 91 %, ¿cuál es su potencia?

Solución. La potencia consumida por el motor es: 100 A · 220 V = 22 000 W. Si el 91 % de esta energía está disponible, entonces el motor produce:

$$(91\ \%)22\,000\ \text{W} = 20\,020\ \text{W} = 20\,020\,(\text{W})/736\,(\text{W/CV}) = 27{,}8\ \text{CV}$$

Problema 5-46 Un calentador tiene una diferencia de potencial de 100 voltios y produce 0,5 kilocalorías por segundo. ¿Cuál es su resistencia?

Solución. Primero vamos a cambiar kilocalorías por segundo a vatios:

$$0{,}5\ \text{kcal/seg} = 0{,}5\ \text{kcal/seg}\cdot 4{,}186\cdot10^3\ \text{J/kcal} = 2093\ \text{J/seg} = 2093\ \text{W}$$

Ahora, amperios = vatios por voltio; luego 2093 (W)/100 (V) = 20,9 A. Potencia = I^2R; por tanto:

$$2093\ \text{W} = (20{,}9)^2\ \text{A}^2\ R \text{ y } R = \frac{2093\ \text{W}}{(20{,}9\ \text{A})^2} = 4{,}78\ \Omega$$

Problema 5-47 Un motor de 110 voltios y 15 amperios produce 1600 vatios. ¿Cuál es su eficiencia? ¿Cuántas kilocalorías pierde el motor si funciona durante 8 horas?

Solución. La potencia que le entra al motor es de 110 V · 15 A = 1650 W.

$$\text{Eficiencia} = \frac{\text{energía suministrada}}{\text{energía producida}} = \frac{1600\ \text{W}}{1650\ \text{W}}\cdot 100 = 97\ \%$$

La potencia que se pierde como calor es igual a:

$$1650\ \text{W} - 1600\ \text{W} = 50\ \text{W} = 50\ \text{J/seg} = \frac{50\ \text{J/seg}}{4{,}186\cdot10^3\ \text{J/kcal}} = 1{,}19\cdot10^{-2}\ \text{kcal/seg}$$

Entonces, $1{,}19\cdot10^{-2}$ (kcal/seg) · 8 h · 3600 seg/h = 343 kcal.

Problema 5-48 Resistencias de 3 y 6 ohmios se conectan a una batería de 6 voltios. ¿Cuántos vatios se producen en cada resistencia cuando se conectan en serie y en paralelo?

Solución. Cuando se conectan en serie las resistencias: $R = 3\,\Omega + 6\,\Omega = 9\,\Omega$ Entonces:

$$I = E/R = 6\text{ V}/9\,\Omega = 2/3\text{ A}$$

La potencia producida en la resistencia de $3\,\Omega = RI^2 = (2/3\text{ A})^2 \cdot 3\,\Omega = 1{,}33$ W.
La potencia producida en la resistencia de $6\,\Omega = I^2R = (2/3\text{ A})^2 \cdot 6\,\Omega = 2{,}67$ W.

$$\text{Potencia total producida} = 1{,}33\text{ W} + 2{,}67\text{ W} = 4\text{ W}$$

Si las resistencias se conectan en paralelo:

$$1/R = 1/3 + 1/6 = 3/6;\ \text{por tanto, } R = 2\,\Omega$$

Entonces: $I = E/R = 6\text{ V}/2\,\Omega = 3$ A.
La potencia producida en la resistencia de $3\,\Omega = I^2R = (3\text{ A})^2 \cdot 3\,\Omega = 27$ W.
La potencia producida en la resistencia de $6\,\Omega = RI = (3\text{ A})^2 \cdot 6\,\Omega = 54$ W.

$$\text{Potencia total producida} = 27\text{ W} + 54\text{ W} = 81\text{ W}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. ¿Qué ventajas tiene una dinamo de $E = 220$ voltios frente a un conjunto de generadores asociados en serie que totalizarán la misma fuerza electromotriz?

2. ¿A qué se debe la diferencia entre la fuerza electromotriz de un generador y la diferencia de potencial entre sus bornes?

3. Se tiene una agrupación de n pilas iguales. ¿Cuál es la condición que debe cumplirse para que en un circuito de resistencia R produzcan una corriente de la misma intensidad colocadas en serie o en paralelo?

4. Dos resistencias de 6 y 12 ohmios se conectan en paralelo a una batería de 12 voltios de fuerza electromotriz y 1 ohmio de resistencia interna. Calcule la intensidad suministrada por la batería, la corriente que circula por la resistencia de 12 ohmios y la tensión entre los bornes de la batería.

5. Demuestre que las pérdidas de calor de dos resistencias asociadas en paralelo es inversamente proporcional al valor óhmico de ellas.

6. ¿La energía a través de un conductor se desplaza con la misma velocidad que los electrones?

7. ¿Cuál es el nombre de la unidad de conductancia y por qué?

8. Determine las magnitudes de un generador de corriente.

9. *a*) Calcule la resistencia de tres lámparas de 40, 60 y 100 vatios: 1, si son para tensión de 120 voltios; 2, si son para tensión de 240 voltios.

b) Calcule las intensidades que circulan por cada una de las seis lámparas anteriores cuando están correctamente conectadas.

c) Calcule las intensidades de corriente que pasarán: 1, por las tres de 120 si se conectan a una red de 240 voltios; 2, por las tres de 240 si se usan en una red de 120 voltios.

d) Calcule la potencia que consume cada una de las seis lámparas en el caso anterior.

10. Un calentador eléctrico hace hervir un litro de agua que está a 28° C en diez minutos. Sabiendo que por su resistencia circulan 4 amperios calcule el valor de la misma, el voltaje de la red y la potencia del calentador.

PILAS VOLTAICAS: De reacciones químicas se obtiene corriente

$\mathcal{E}^\circ$ es el potencial de electrodo estándar (25°C) de reducción (que es diferente para cada elemento químico)

la fem de una pila es $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_{red} - \mathcal{E}_{oxid.}$

donde $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_i^\circ + \frac{0{,}05916}{i_i} \log[\text{concentración Molar}]_i$

(+) cátodo $\rightarrow \mathcal{E}^\circ_{red} > \mathcal{E}^\circ_{oxida} \leftarrow$ ánodo (−)

$$\text{fem} = \Delta\mathcal{E} = \left(\mathcal{E}^\circ_{red} + \frac{0{,}05916}{i_{red}} \log[\text{Conc.}_{red}]\right) + \left(\mathcal{E}^\circ_{oxid} + \frac{0{,}05916}{i_{oxid}} \log[\text{Conc}_{oxid}]\right)$$

donde: i: es la valencia que actúa en la celda del elemento.

CAPITULO 6

Electroquímica

estudia los fenómenos físicos y químicos que se producen al dar corriente a unos elementos químicos para que debidos a ella se produzca una reacción química.

aquí el que tiene el cátodo (el de mayor $\mathcal{E}^\circ$) es (−) y el ánodo (el de menor $\mathcal{E}^\circ$) es (+)

Leyes de Faraday. En una disolución electrolítica se cumple que:

1. La cantidad de sustancia liberada o depositada en un electrodo es proporcional a la cantidad de electricidad que pasa por el electrólito.

2. Las cantidades que de diferentes sustancias pueden ser liberadas o depositadas por una misma cantidad de electricidad son proporcionales al *equivalente químico* de aquéllas.

3. La cantidad de electricidad necesaria para depositar o liberar un *equivalente gramo* de cualquier sustancia es fija, igual a 96 500 culombios, y se llama *Faraday* (F).

Todo lo cual se puede resumir en que *el número de equivalentes gramo de una sustancia depositada, liberada o que reacciona con un electrodo es igual al número de faradays de electricidad que han atravesado el eleetrólito*: $\#Eq = \#F$ como $\#Eq = \frac{m}{Eq} = \#F$

$$\Rightarrow m = Eq\,\#F \qquad (6\text{-}1)$$

siendo m la masa en gramos de sustancia, $\#Eq$ el número de equivalentes gramo y $\#F$ el número de faradays.

$|e^-| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ part/mol También, recordando los conceptos de equivalente químico y equivalente gramo:

q_{mol}: carga de una mol

$F = q_{mol} = N_A|e^-| = 96485$ C

$F \approx 96500$ C

$$\frac{\text{intensidad} \cdot \text{tiempo}}{\text{faraday}} = \frac{\text{masa en gramos} \cdot \text{valencia}}{\text{masa atómica}}$$

$$\#F = \frac{q}{F} = \frac{I \cdot t}{F} = \frac{m \cdot v}{m'} = \frac{m}{Eq} = \#Eq \qquad (6\text{-}2)$$

Equivalente electroquímico. Es el número de gramos de sustancia liberada o depositada por *un culombio*:

$$Z = \frac{Eq}{F} = \frac{m}{q} \qquad (6\text{-}3)$$

Por consiguiente, la masa m que se libera en un proceso electrolítico es:

$$m = Z \cdot I \cdot t \quad \text{o bien} \quad m = Z \cdot Q \qquad (6\text{-}4)$$

siendo Q la cantidad de carga (el número de culombios).

Vea en los textos de: FISICA de Alonso y Acosta (págs: 192-208)
FISICA de Velero (págs de "Aplicaciones": 158–160)

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 6-1 Dos pilas electrolíticas conectadas en serie contienen sulfato de cobre y nitrato de plata, respectivamente. Si 2 faradios pasan por las pilas, ¿cuánto cobre y cuánta plata se deposita en cada cátodo? Los pesos equivalentes del cobre y la plata son 31,77 gramos y 107,88 gramos, respectivamente.

Solución. Como las pilas electrolíticas están conectadas en serie, la misma cantidad de electricidad pasa por cada una; por tanto, 2 F pasan por cada pila. Entonces:

$$m = F \cdot E_q = 2 \cdot 31{,}77 \text{ g} = 63{,}54 \text{ g de cobre}$$

y

$$m = F \cdot E_q = 2 \cdot 107{,}88 \text{ g} = 215{,}76 \text{ g de plata}$$

Problema 6-2 *a*) ¿Cuánto aluminio se puede fijar por hora a partir de un baño de bauxita fundida y criolita por medio de una corriente de 20 amperios? El peso equivalente del aluminio es de 8,99 gramos. *b*) ¿Cuánto tarda una corriente de 100 amperios para producir 36 gramos de oxígeno por medio de la electrólisis del agua? El peso equivalente del oxígeno es de 8 gramos.

Solución. *a*) Empleando la fórmula $m = \dfrac{E_q}{96\,500 \text{ C}} It$,

$$m = \frac{8{,}99 \text{ g}}{96\,500 \text{ C}} 20 \text{ A} \cdot 3600 \text{ seg} = 6{,}71 \text{ g}$$

b) Como $m = \dfrac{E_q}{96\,500 \text{ C}} It$, entonces $t = \dfrac{m \cdot (96\,500)\text{ C}}{E_q}$; por tanto,

$$t = \frac{36 \text{ g} \cdot (96\,500 \text{ C})}{8 \text{ g} \cdot 100 \text{ A}} = 4342 \text{ C/A} = 4342 \text{ A} \cdot \text{seg/A} = 4342 \text{ seg} = 1 \text{ h } 12'22''$$

Problema 6-3 Dos pilas electrolíticas están conectadas en serie. Una contiene sulfato de cobre y la otra nitrato de níquel. Si 20 gramos de cobre se platean en la primera pila, ¿cuánto níquel se platea en la segunda pila en el mismo periodo? Los pesos equivalentes son 31,8 gramos y 29,35 gramos, respectivamente.

Solución. Empleando la fórmula: $m = F \cdot E_q$ se obtiene $F = m/E_q = 20 \text{ g}/31{,}8 \text{ g} = 0{,}628$. Por tanto, 0,628 F pasan por la celda que contiene el sulfato de cobre. Como las celdas está en serie pasa el mismo número de faradios por la celda que contiene níquel; entonces:

$$m = FE_q = 0{,}628 \cdot 29{,}35 \text{ g} = 18{,}43 \text{ g de níquel}$$

Problema 6-4 *a*) ¿Cuánto cuesta por día de ocho horas, a 3 centavos el kilovatio hora, el platear cromo, empleando una fuente de 6 voltios 20 amperios? *b*) ¿Cuánto cuesta, a 1/2 centavo el kilovatio hora, producir 450 libras de aluminio empleando una fuente de 4 voltios? El peso equivalente del aluminio es de 9 gramos.

Solución. *a*) El número de vatios = 6 V, 20 A = 120 W = 0,12 kW. Entonces 0,12 kW · 8 h = 0,96 kWh. El costo de la electricidad es:

$$0{,}96 \text{ kWh. } 3 \text{ cent/kWh} = 2{,}88 \text{ cent}$$

b) Primero, 450 lb = 450 lb · 454 g/lb = $2{,}04 \cdot 10^5$ g. Como $m = \frac{E_q}{96\,500\ \text{C}} It$, entonces:

$$It = \frac{m \cdot 96\,500\ \text{C}}{E_q} = \frac{2{,}04 \cdot 10^5\ \text{g} \cdot 96\,500\ \text{C}}{9\ \text{g}} = 2{,}19 \cdot 10^9\ \text{C} = 2{,}19 \cdot 10^9\ \text{A} \cdot \text{seg}$$

Ahora, $2{,}19 \cdot 10^9\ \text{A} \cdot \text{seg} \cdot 4\ \text{V} = 8{,}76 \cdot 10^9\ \text{W} \cdot \text{seg} = 8{,}76 \cdot 10^9\ \text{W} \cdot \text{seg} \cdot \frac{1\ \text{kW}}{10^3\ \text{W}} = 8{,}76 \cdot 10^6\ \text{kW} \cdot \text{seg} =$

$= 8{,}76 \cdot 10^6\ \text{kW} \cdot \text{seg} \cdot \frac{1\ \text{h}}{3600\ \text{seg}} = 2{,}47 \cdot 10^3\ \text{kWh}$ y: costo $= 2{,}47 \cdot 10^3\ \text{kWh} \cdot \frac{1/2\ \text{cent}}{\text{kWh}} = 1235$ cent.

Problema 6-5 *a*) ¿Qué masa de plata será depositada por una corriente de 5 amperios, durante 4 horas, de una disolución de $AgNO_3$? *b*) ¿Cuántos átomos de plata se depositan? (108 = peso molecular gramo de la plata.)

Solución. *a*) Según la ley de Faraday, $It/F = mj/M$ si $\begin{cases} M = \text{peso molecular gramo} \\ j = \text{valencia} \end{cases}$, de donde:

$$m = \frac{I \cdot t \cdot M}{F \cdot j} = \frac{14\,400(5) \cdot 108}{96\,500 \cdot 1} = 80{,}6\ \text{g}$$

b) El número de moléculas de una sustancia cuya masa es numéricamente igual a su peso molecular se llama número de Avogadro y se representa por N. De la relación $Ne = F$, donde e es la carga del electrón. F la carga eléctrica de un faradio, entonces el número de átomos de plata depositados es: $(m/M) \cdot N$. También:

$$\left(\frac{m}{M} N\right) e = F. \quad \therefore N = \frac{F \cdot M}{m \cdot e} = \frac{96\,500 \cdot (108)}{80{,}6(1{,}6029 \cdot 10^{-19})} \approx 8 \cdot 10^{23}\ \text{átomos}$$

Problema 6-6 Calcule el volumen de los productos gaseosos, a 0° C y presión de 3 atmósferas, liberados durante la electrólisis del agua durante dos horas por una corriente de 10 amperios.

Solución. $t = 7200$ seg; $I = 10$ A; peso molecular del hidrógeno: $M = 2{,}016$, y su valencia: $j = 1$; peso molecular del oxígeno: $M = 32$, y su valencia: $j = 2$; densidad del hidrógeno: $\rho = 0{,}0899 \cdot 10^{-3}$ g/cm^3, y la del oxígeno: $\rho = 1{,}429 \cdot 10^{-3}$ g/cm^3.

Para convertir electrolíticamente una molécula de H_2O líquida en hidrógeno y oxígeno hay que transferir 2 faradios.

Para el caso del hidrógeno:

$$m = \frac{M \cdot I \cdot t}{2 \cdot j \cdot F} = \frac{2{,}016 \cdot 10 \cdot 7200}{2 \cdot 1 \cdot 96\,500} = 0{,}75\ \text{g}$$

que es la masa desprendida del gas hidrógeno; su volumen correspondiente es:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{0{,}75}{0{,}0899 \cdot 10^{-3}} = 8453\ \text{cm}^3 = 8{,}453\ \text{litros}$$

Para el oxígeno, la masa de gas desprendida es:

$$m = \frac{M \cdot I \cdot t}{2 \cdot j \cdot F} = \frac{32 \cdot 10 \cdot 7200}{2 \cdot 2 \cdot (96\,500)} = 5{,}9\ \text{g}$$

y su volumen:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{5{,}9\ \text{g}}{1{,}429 \cdot 10^{-3}} = 4123\ \text{cm}^3 = 4{,}128\ \text{litros}$$

Problema 6-7 Para platear una cuchara se mantiene durante dos horas una corriente de 0,2 amperios. ¿Cuál es el espesor de la lámina de plata depositada si la superficie de la cuchara es de 200 centímetros cuadrados?

Solución. El peso molecular de la plata es: $M = 108$; la valencia de la plata: $j = 1$, y su densidad: 10,5 g/cm^3.

De la ecuación de la electrólisis de Faraday: $mj/M = It/F$ se obtiene:

$$m = \frac{MIt}{Fj} = \frac{108 \cdot (0{,}2)7200}{96\,500 \cdot 1} = 1{,}5 \text{ g}$$

El volumen correspondiente a esta masa de plata depositada será:

$$V = m/\rho = \frac{1{,}5}{10{,}5} = 0{,}142 \text{ cm}^3$$

El espesor de la lámina de plata depositada está por la relación $V = A \cdot e$; siendo e el espesor:

$$e = V/A = \frac{0{,}142}{200} = 0{,}071 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determine la razón de las cantidades de electricidad necesarias para depositar la misma cantidad de hierro en una disolución que tenga ion ferroso y de otra que contenga el ion férrico.
2. Para platear un cilindro de 2 centímetros de diámetro y 5 centímetros de altura se emplea una corriente de 5 amperios durante seis horas. ¿Cuál es el espesor de la capa de plateado? (Densidad de la plata: 10.)
3. Por una disolución de sulfato sódico pasan 10 faradays. ¿Cuál es el volumen en condiciones normales de la mezcla gaseosa que se libera?
4. Determine el número de iones hidrógeno necesarios para transportar un faraday.
5. Se conectan en serie dos pilas electrolíticas si en la primera se depositan 126 gm de cobre, ¿qué masa de plata se deposita en la segunda? La primera contiene sulfato de cobre y la segunda nitrato de plata.
6. ¿Qué gases y en que cantidad se producen en 10 minutos en la electrolisis de una solución de ácido sulfúrico con una corriente de 5 amperios?
7. Se desea niquelar una lámina de 10 cm con una corriente de 10 amperios durante 2 horas. Si se cubren ambas caras, ¿cuál es el espesor de la capa de níquel? Densidad del níquel 8,9 gr/cm^3.

CAPITULO 7

Electromagnetismo. Propiedades magnéticas de la materia

Introducción. Los fenómenos magnéticos se observaron al principio en los imanes naturales, que tienen la propiedad de atraer al hierro; pero el estudio de los mismos careció de importancia hasta que Oersted puso de manifiesto en 1819 los efectos magnéticos de la corriente eléctrica por las desviaciones que experimentaba una brújula en las proximidades de un conductor eléctrico.

Hoy se sabe que los fenómenos magnéticos son debidos a fuerzas que originan las cargas eléctricas en movimiento; es decir, además del campo eléctrico que éstas producen por la ley de Coulomb, al desplazarse originan en sus proximidades una perturbación que constituye el campo magnético. Comenzamos, pues, su estudio por los fenómenos que están ligados a las cargas móviles, ya libres o formando corrientes eléctricas, y quedará para más tarde el estudio de los imanes y sus propiedades.

El campo magnético no se pone sólo de manifiesto en pequeños imanes y brújulas; tiene lugar también sobre cualquier carga móvil dentro del campo creado por otra; por tanto, entre dos cargas eléctricas en movimiento se manifiestan dos tipos de acciones; 1.°, fuerzas producidas por el campo eléctrico (indistintamente para cargas fijas o móviles), y 2.°, fuerzas producidas por el campo magnético (existentes solo entre cargas móviles). Cuando se trata de corrientes eléctricas en conductores solo aparecen las fuerzas magnéticas, debido a que las electrostáticas se compensan mutuamente por las atracciones y repulsiones de los iones y electrones (que están en movimiento desordenado en ambos conductores) entre sí.

Fuerza que el campo magnético ejerce sobre una carga móvil; unidad de campo. Al moverse una carga positiva q^+ con velocidad v en el interior del campo magnético de inducción B, se encuentra bajo la influencia de una fuerza **F** (fuerza de Lorentz) cuya magnitud y dirección es (Fig. 7-1):

$$\mathbf{F}'_{1\text{-}A} = q_A(\mathbf{v}_A \times \mathbf{B}_{1\text{-}A}) \qquad (7\text{-}1)$$

Fuerza magnética del campo B_1 sobre la carga A con velocidad v_A

cuya interpretación escapa de nuestros conocimientos.

Si el ángulo formado por los vectores $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{B}_1$ es α, el módulo de **F** vale:

$$F'_{1\text{-}A} = q_A v_A B_{1\text{-}A} \operatorname{sen}\alpha \qquad (7\text{-}2)$$

y su dirección es la normal al plano determinado por **V** y **B**. Su valor máximo corresponde a un ángulo de $\pi/2$ radianes:

$$F_{\text{máxima}} = qvB \qquad (7\text{-}3)$$

TEOREMA: Si a una partícula eléctrica que está en un momento t_0 viajando a una velocidad v_0, se le aplica (en el tiempo t_0) un campo magnético uniforme externo, este puede alterar la dirección del vector velocidad v_0, pero la magnitud de la velocidad permanecerá constante.

Cuando a una partícula cargada que se mueve a una velocidad V_0 se le aplica un campo magnético B uniforme que sea perpendicular a V_0. Entonces dicho campo induce a que la trayectoria de la partícula sea una circunferencia

$\therefore F' = F_{cent.}$

$$qV_0B = m\frac{V_0^2}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{mV_0}{qB}}$$

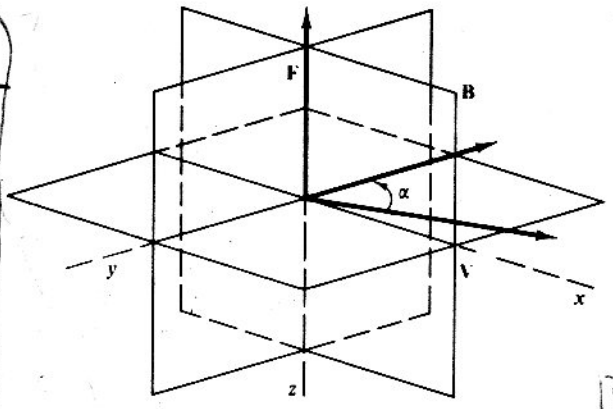


Figura 7-1

Campo magnético (sobre un punto P) creado por el movimiento de una carga q_i puntual

$$\boxed{\mathbf{B}_{i\text{-}P} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{q_i}{r_{i\text{-}P}^3}\left(\mathbf{V}_i \times \mathbf{r}_{i\text{-}P}\right)}$$

Campo resultante producido por la acción de algunos campos magnéticos debidos a cargas puntuales

$$\mathbf{B}_{R\text{-}P} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{B}_{i\text{-}P} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i}{4\pi}\frac{q_i}{r_{i\text{-}P}^3}\left(\mathbf{V}_i \times \mathbf{r}_{i\text{-}P}\right)$$

Fuerza resultante magnética

$$\mathbf{F}'_{R\text{-}A} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_{i\text{-}A} = q_A\mathbf{V}_A \times \left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{B}_{i\text{-}A}\right)$$

de la inducción de algunos campos magnéticos sobre una carga q_A

que sirve para determinar la dirección de **B** sabiendo la de la velocidad y la de la fuerza máxima, pues estos tres vectores forman un triedro trirrectángulo (regla del sacacorchos o de la mano izquierda: índice, B; medio, V; pulgar, F).

Según la expresión (7-3), la unidad de inducción magnética en un punto donde al moverse la carga positiva de 1 culombio a la velocidad de 1 m · seg^{-1}, en dirección normal al mismo, la fuerza que sobre ella actúa es de 1 newton, recibe el nombre de weber · m^{-2} por razones que ya veremos. También se le llama miriagauss, pues en el sistema de unidades electromagnéticas las fuerzas se miden en dinas, las velocidades en cm · seg^{-1}, siendo la unidad de carga de 10 culombios (carga electromagnética):

$$[B] = 1\ \text{Tesla} = 1\ (\text{weber})\cdot \text{m}^{-2} = 1\ \text{miriagauss} = \frac{1\ \text{newton}}{1\ \text{culombio}\cdot 1\ \text{m}\cdot\text{seg}^{-1}} = \frac{\text{N}}{\text{mA}} = \frac{\text{Nm}}{\text{A}} = \text{Volt}\cdot\text{seg} =$$

$$= \frac{10^5\ \text{dinas}}{10^{-1}\ \text{u.e.m. de carga}\ 10^2\ \text{cm}\cdot\text{seg}^{-1}} = \frac{10^4\ \text{dinas}}{\text{u.e.m. de carga cm}\cdot\text{seg}^{-1}} = \tag{7-4}$$

$$= 10^4\ (\text{u.e.m. de campo o})\ \text{gauss.} \Rightarrow \boxed{1\text{T} = 10^4\text{G}}$$

Las dimensiones de la inducción magnética son:

$$[B] = MT^{-1}Q^{-1} \tag{7-5}$$

Las unidades en el sistema M.K.S.A. son: $[B] < > \text{V}\cdot\text{seg}\cdot\text{m}^{-2}$.

Acción del campo magnético sobre una corriente eléctrica. Al colocar un conductor metálico en un campo magnético, si por él no circula corriente, no se verá sometido a ninguna fuerza magnética, a pesar del movimiento de agitación térmica de los electrones y de los iones de la red cristalina, pues por realizarse en todas direcciones se compensan las fuerzas. Por el contrario, una corriente eléctrica se trata de un flujo de electrones que avanza a lo largo de un conductor con una velocidad de conjunto v, de tal modo que al encontrarse en el interior de un campo magnético ocurre como si cada uno de los electrones se moviera con la velocidad v dirigida en cada punto según el eje del conductor, permaneciendo los iones en reposo. Por ello, cada electrón se encuentra sometido a una fuerza magnética, resultando sobre el conductor una fuerza de conjunto.

Sea la sección del conductor S y n el número de electrones por unidad de volumen, de carga e^-, moviéndose a lo largo del conductor con velocidad v; la densidad de la corriente será:

$$I = n\cdot e\cdot v\cdot S \tag{7-6}$$

La fuerza elemental que actúa sobre cada carga debido a un campo magnético B es:

$$f = evB \operatorname{sen} \alpha$$

pero como el número de cargas existentes en una longitud l es:

$$N = nlS \tag{7-7}$$

la fuerza total será:

$$F = f \cdot N = n \cdot e \cdot v \cdot S \cdot l \cdot B \cdot \operatorname{sen} \alpha \tag{7-8}$$

es decir, según (7-6):

$$F = IlB \operatorname{sen} \alpha \tag{7-9}$$

Es válida también aquí la regla de la mano izquierda, pero teniendo en cuenta que por tratarse de electrones convencionalmente se estableció el sentido de i contrario al de éstos.

En general, la fuerza elemental df que actúa sobre un elemento de corriente de longitud dl, el cual forma un ángulo α con la dirección del campo B, es, escalar y vectorialmente:

$$df = IdlB \operatorname{sen} \alpha \quad \text{o} \quad d\mathbf{f} = I[d\mathbf{l} \times \mathbf{B}] \tag{7-10}$$

fuerza sobre un elemento de corriente

$$F' = I \int d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

que constituye la primera ley de Laplace.

La acción global del campo magnético sobre un conductor rectilíneo de longitud l puede obtenerse sumando las fuerzas elementales (7-10):

Si $\mathbf{l} = l\,\mathbf{u}$ donde $\mathbf{u}$ es un vector unitario $\parallel$ a $\mathbf{l}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{F}' = I[\mathbf{l} \times \mathbf{B}]$ fuerza sobre un alambre recto (de longitud $\mathbf{l}$) que lleva una corriente i (7-11)

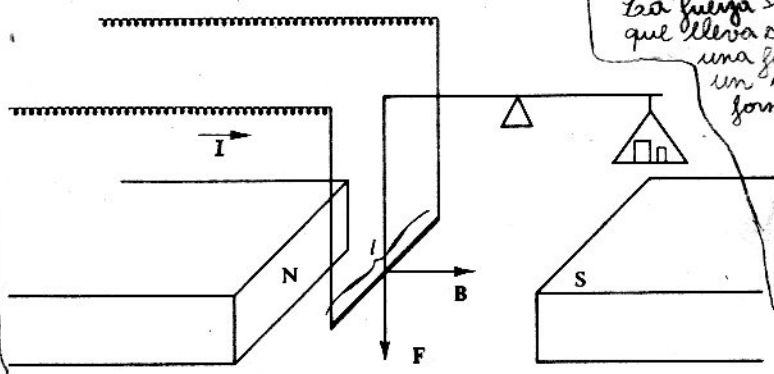
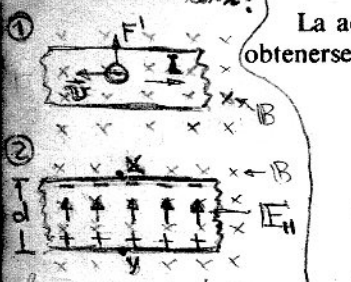


Figura 7-2

La balanza de Cotton (Fig. 7-2) puede servirnos para comprobar este resultado; en ella la medida del campo magnetico se reduce a una pesada. Cuando el conductor CD, de longitud l, está recorrido por una corriente constante i, las pesadas son proporcionales a la intensidad del campo magnético, y así queda comprobada la expresión de la fuerza de Lorentz encontrada para un conductor en el interior de un campo magnético.

Acción del campo magnético sobre un circuito plano. Solenoides. Consideremos un conductor de forma rectangular (Fig. 7-3) que puede girar alrededor del eje OO'; en la normal al plano determinado por el conductor se encuentra el vector superficie, y desde su extremo se ve girar la corriente en sentido opuesto al de las agujas del reloj; llamemos a y b a las dimensiones lineales del cuadro y φ al ángulo que el vector superficie forma con la dirección del campo magnético.

Efecto Hall:
al aplicar un B a un conductor con i:



hace que se produzca una fuerza magnética sobre las cargas en movimiento, empujándolas a un borde del conductor hasta que se equilibren

$F' = -F_{electrostatica}$

$q(v \times B) = -qE$

$\Rightarrow E_H = -v \times B$ llamado: campo eléctrico de Hall

$\Rightarrow vB = \frac{V_{xy}}{d}$

como: $v = \frac{J}{nq^-}$

$\frac{J}{nq^-} B = \frac{V_{xy}}{d}$

$\Rightarrow n = \frac{JB}{q^-} \frac{d}{V_{xy}}$

como $q^- = e^-$ y $J = I/S$

$\Rightarrow n = \frac{B}{e^-} \frac{I}{S} \frac{d}{V_{xy}}$

$e^- = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

donde n es la densidad de electrones libres de un material

además: $I = \frac{V_{ab}}{R}$

La fuerza sobre un conductor que lleva corriente y que tiene una forma arbitraria, en un campo magnético uniforme, es:

$\mathbf{F} = I\mathbf{l}' \times \mathbf{B}$

donde $\mathbf{l}'$ es un vector dirigido desde uno de los extremos del conductor hacia el extremo opuesto

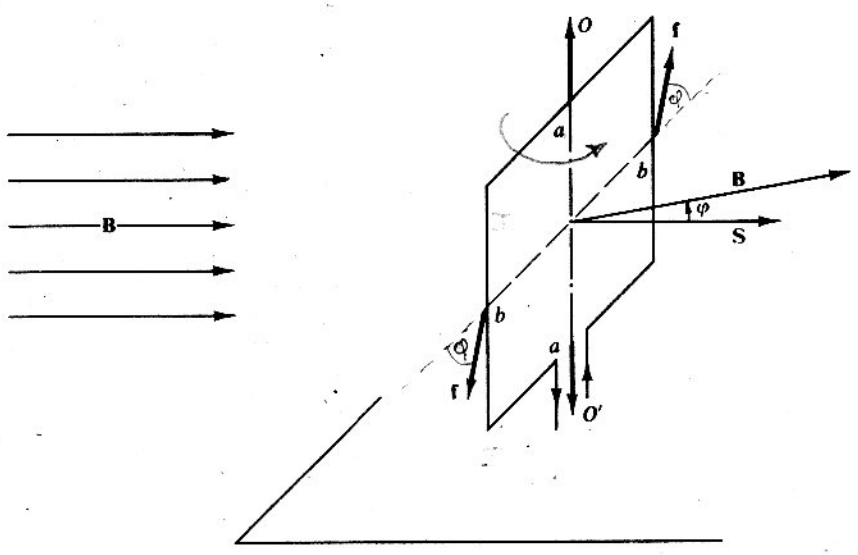


Figura 7-3

Las fuerzas que se ejercen sobre los lados a se anulan por ser opuestas e iguales, pero las que actúan en los lados b son de magnitud:

$$f = IbB$$

siempre iguales entre sí, pero no directamente opuestas, determinando un par tal que el valor de su momento es:

$$\mathcal{M} = a \cdot IbB \cdot \operatorname{sen} \varphi = ISB \operatorname{sen} \varphi \qquad (7\text{-}12)$$

y vectorialmente:

$$\mathbf{M} = I[\mathbf{S} \times \mathbf{B}] \qquad (7\text{-}13)$$

teniendo en cuenta que $S = a \cdot b$ (área del rectángulo). pero $\mathbf{S} = S\,\mathbf{u}_n$ donde $\mathbf{u}_n$ es un vector unitario perpendicular a S

Esta expresión vale, puede demostrarse, para todo circuito plano de forma cualquiera situado en un campo magnético, y en ello se basa el motor eléctrico y la mayor parte de los instrumentos de medida de la corriente eléctrica.

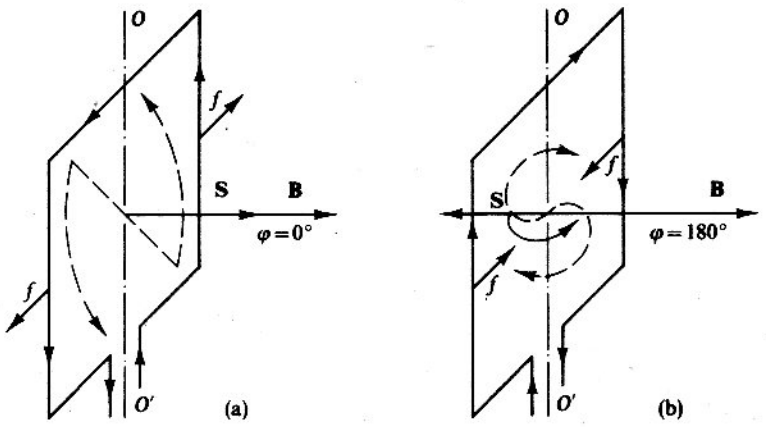


Figura 7-4

Puede observarse en la Figura 7-4 que la porción del cuadro que corresponde al equilibrio estable es aquella en $\varphi = 0°$, y la condición de inestabilidad corresponde a $\varphi = 180°$; el máximo flujo saliente se alcanza en la porción de estabilidad, por la cara norte o positiva, representada por el vector **S** según la regla de Maxwell.

Si no hay solo una espira, sino N idénticas, todas recorridas por la misma corriente, el momento del par de fuerzas será:

$$\mathbf{M} = NI[\mathbf{S} \times \mathbf{B}]$$

La expresión:

$$\mathbf{m} = NI\mathbf{S} \quad \text{donde} \quad \mathbf{S} = S\mathbf{u} \qquad (7\text{-}15)$$

es el momento magnético del circuito y viene representado por un vector cuya dirección es la del vector superficie **S**; por tanto, el momento del par de fuerzas que actúa sobre un cuadro de N espiras puede escribirse así:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{m} \times \mathbf{B}] \qquad (7\text{-}16)$$

De la expresión (7-15) pueden deducirse las unidades del momento magnético:

$$[\mathbf{m}] = \mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^2 \qquad B_{\text{dipolo}} \propto \frac{\mathbf{m}}{d^3} \qquad (7\text{-}17)$$

El momento magnético de las corrientes cerradas permite identificarlas por sus efectos magnéticos con un imán, pues se comportan igual que un campo magnético.

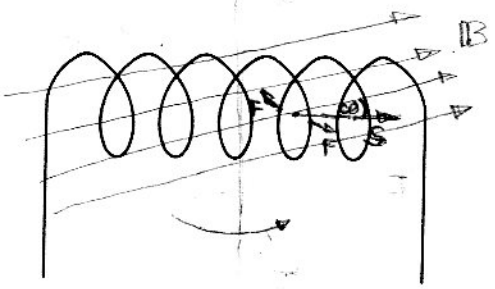


Figura 7-5

Un alambre arrollado en hélice recibe el nombre de solenoide (Fig. 7-5) y, en el caso en que las espiras estén muy próximas entre sí, puede reducirse a una serie de circuitos circulares de igual radio y con centro en el eje del solenoide; si éste se encuentra en un campo magnético uniforme de intensidad **B**, la acción que sufre viene dada por (7-16), en que **m** puede calcularse por (7-15), siendo S el área de la sección y N el número de espiras.

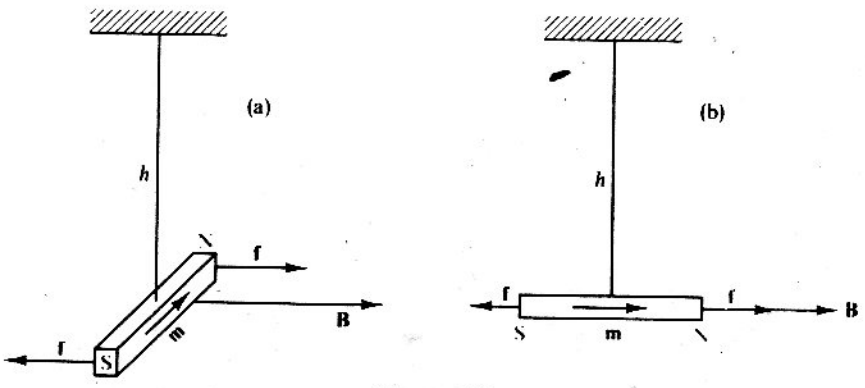


Figura 7-6

Imanes: Equivalencia entre imanes y solenoides. Flujo magnético. Para explorar un campo magnético ordinariamente se recurre a una pequeña brújula o magnetómetro; cuando puede girar libremente sobre su punto medio se ve sometida a un par de fuerzas [Fig. 7-6(a)] cuyo momento se mide por la torsión adquirida por un hilo h del cual está suspendida la aguja; su magnitud puede expresarse en función de dos factores: uno, **B**, campo en el punto en que se encuentra, y otra característica del magnetómetro, **m**:

Tambien sirbe: $\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}}$ para imanes longitudinales (7-18)

siendo **m** un vector dirigido en sentido sur-norte, llamado momento magnético del imán; así, pues, el imán se comportará en un campo magnético como un solenoide de igual momento magnético y viceversa.

si entre el imán no es el vacío sino un medio

$\Rightarrow \mu = \mu_0 + \eta, \quad \eta = \mu_0 \chi$

donde χ es la susceptibilidad magnética

$\chi = K_m - 1$

donde K_m es la permeabilidad magnética relativa

$K_m = \frac{B}{B_0} = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi$

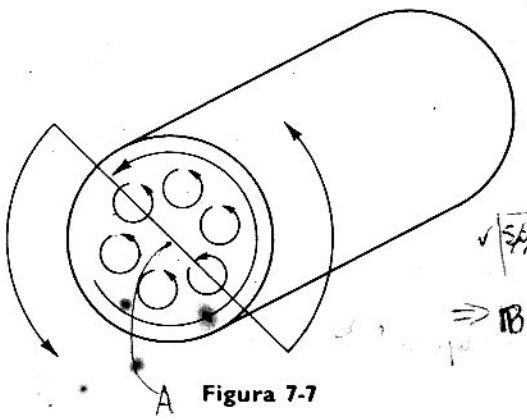


Figura 7-7

en un material inducido por un $\mathbb{B}$, surge un Vector de magnetización o imantación: $\mathbb{M}$

$\mathbb{M} = \frac{\Sigma \mathbb{m}}{\text{Volumen}} = \chi \mathbb{H} = \frac{\chi}{\mu} \mathbb{B}$

donde $\mathbb{H}$ es la intensidad magnética o excitación magnét.

$\cancel{\text{Siendo: } \mathbb{M} = \frac{\mathbb{B}}{\mu_0} - \mathbb{M}}$

$\Rightarrow \mathbb{B} = \mu_0 \mathbb{H} + \mu_0 \mathbb{M}$

Según Ampère, esta equivalencia entre imán y solenoide se comprende si se tiene presente que el primero debe sus propiedades magnéticas a corrientes moleculares cerradas (Fig. 7-7), que determinan una resultante que gira en sentido opuesto a las agujas del reloj (cara N).

Para fijar la dirección del campo se deja orientar libremente una pequeña brújula y su dirección en equilibrio S-N coincide con la del campo (Fig. 7-6), es decir, el vector momento magnético tiende a orientarse en la dirección del campo. El campo magnético puede representarse por líneas de fuerza, tangentes en todos sus puntos a la dirección del campo; el número de líneas por unidad de superficie es la intensidad del campo en dicho punto (superficie normal a B). El número total de líneas de fuerza que atraviesan cualquier superficie es el flujo magnético ϕ, y si el campo es uniforme:

$$\phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \tag{7-19}$$

por tanto, la unidad Giorgi de flujo es la de un campo magnético unidad por metro cuadrado. Se denomina weber, siendo por ello, como ya se ha visto, la unidad de campo magnético el weber $\cdot$ m^{-2}, o tesla (T).

En el sistema electromagnético la unidad de flujo es el gauss $\cdot$ cm^2, denominado maxwell o línea de fuerza:

$$\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{A}} = 1 \text{ weber} = 1 \text{ miriagauss} \cdot \text{m}^2 = 10^4 \text{ gauss} \cdot 10^4 \text{ cm}^2 = 10^8 \text{ maxwell}$$ UP

Cuando **B** y **S** forman un ángulo inferior a $\pi/2$ el flujo magnético es positivo o saliente; cuando este ángulo es superior a $\pi/2$ es negativo o entrante.

De manera análoga a los dipolos eléctricos, en un imán perfecto o dipolo magnético de longitud l puede considerarse que todo el magnetismo se concentra sobre los extremos, llamados polos, y así puede definirse el polo magnético de esta forma:

$$\boxed{p = \frac{|\mathbf{m}|}{l} = A|\mathbf{M}|} \tag{7-20}$$

$[p] = [A \cdot m]$ unidad

Teniendo en cuenta la expresión (7-15), por analogía un solenoide posee el polo:

$$p = \frac{m}{l} = \frac{N \cdot I}{l} S \tag{7-21}$$

apareciendo el polo como una magnitud derivada de la verdadera característica del imán, que es su momento magnético **m**, y no se concibe como una masa magnética creadora de un campo magnético, igual que la masa gravitatoria o la carga. Sin embargo utilizamos la ficción de polo magnético por ser útil y cómoda.

Al colocar un imán en un campo magnético cada polo está bajo la influencia de una fuerza:

$$\mathbf{f} = p\mathbf{B} \qquad B_{1\text{-}p} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{p}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{7-22}$$

deducible de (7-18) al dividir por la longitud del imán. También para los polos magnéticos es válida la ley de Coulomb, que determina las repulsiones y atracciones que se ejercen dos polos de igual o distinto signo:

$$\text{como: } F_{1\text{-}2} = p'_2 B_{1\text{-}2} \Rightarrow F_{1\text{-}2} = \mu \frac{p_1 \cdot p'_2}{4\pi r^2} \Rightarrow \tag{7-23}$$

siendo μ una constante que depende del medio, denominada permeabilidad magnética del medio.

En el sistema Giorgi la unidad de polo es:

$$[p] = \text{unidad polo} = \frac{\text{A} \cdot \text{m}^2}{\text{m}} = \text{A} \cdot \text{m} \text{ [se deduce de la (7-20)]}$$

En el sistema c.g.s. a partir de (7-22):

$$\text{unidad polo (c.g.s.)} = 1 \frac{\text{dina}}{\text{gauss}} = \frac{10^{-5} \text{ newtons}}{10^{-4} \text{ miriagauss}} = 10^{-1} \text{ unidad polo (Giorgi)}$$

En el sistema Giorgi la permeabilidad magnética en el vacío es:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ newtons} \cdot \text{Ampère}^{-2}$$

Campo magnético creado por una carga eléctrica móvil. Ha quedado estudiado qué ocurre cuando se sitúa una carga eléctrica o una corriente en un campo magnético; pero queda considerar el campo magnético creado por estas cargas en movimiento o por una corriente eléctrica, ya que por estar en movimiento los electrones implica la existencia de un campo magnético.

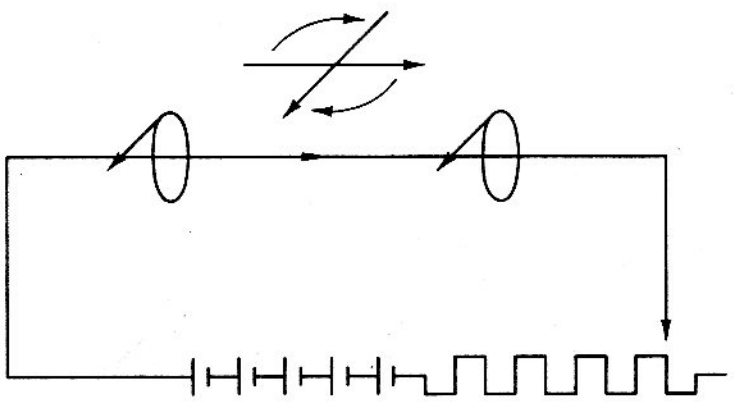


Figura 7-8

La primera manifestación experimental de ello es la que consiguió Oersted (Fig. 7-8), en la que se aprecia la desviación sufrida por una brújula situada en las vecindades de un conductor por el que pasa corriente. La aguja tiende a colocarse perpendicularmente al conductor, o, de otro modo, alineando su momento magnético **m** (Sur-Norte) según la dirección del campo **B**, que coincide con el sentido de giro de un sacacorchos que avanzase según la corriente; las líneas de fuerza del campo *B* pueden observarse espolvoreando limaduras de hierro en una cartulina *P*, tal como se indica en la Figura 7-9.

El campo magnético elemental que se crea en un punto *A* producido por una carga positiva *q* moviéndose en el vacío con velocidad *v* (Fig. 7-10) viene dado por la fórmula:

$$B = k\,\frac{q \cdot v \cdot \operatorname{sen}\theta}{r^2} \tag{7-24}$$

aceptada por ahora como un hecho experimental, pues su comprensión está fuera de nuestros conocimientos. En forma vectorial:

$$\mathbf{B}_{i\text{-}P} = k'\,\frac{q[\mathbf{V} \times \mathbf{r}]}{r^3} \Rightarrow \boxed{\mathbf{B}_{i\text{-}P} = \frac{\mu}{4\pi}\,\frac{q_i(\mathbf{v}_i \times \mathbf{r}_{i\text{-}P})}{r_{i\text{-}P}^3}} \tag{7-25}$$

siendo k una constante que depende del sistema de unidades. En el Giorgi y en el vacío:

$$k' = \frac{\mu_0}{4\pi} \tag{7-26}$$

donde el valor de μ_0 es:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{volt} \cdot \text{seg} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{newtons/Ampère}^2 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{T} \cdot \text{m} \cdot \text{seg}}{\text{C}}$$

que es la permeabilidad en el vacío. Sus dimensiones, según (7-25), y sabiendo las del campo magnético (7-5), son:

$$[\mu_0] = \frac{[B]L^2}{Q \cdot LT^{-1}} = \frac{MT^{-1}Q^{-1}L^2}{QLT^{-1}} = MLQ^{-2}$$

Para otro medio la permeabilidad tiene un valor distinto μ, tal que:

$$\mu = K_m \mu_0 \qquad \boxed{K_m = \frac{B}{B_0} = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi} \tag{7-27}$$

$$\boxed{\mu = K_m \mu_0 = \mu_0 \eta} \qquad \boxed{\chi = \frac{\eta}{\mu_0} = K_m - 1}$$

susceptibilidad magnética

permeabilidad magnética relativa

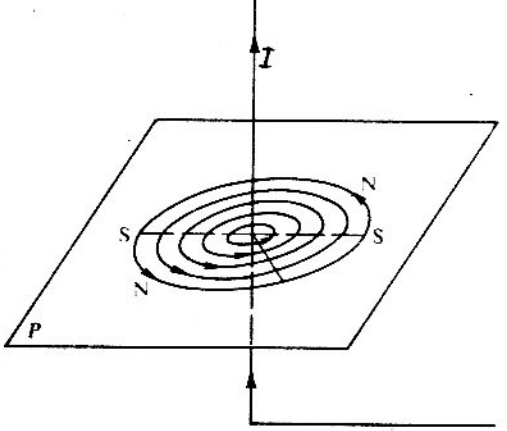


Figura 7-9

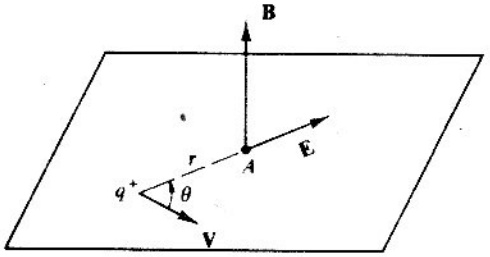


Figura 7-10

siendo K la permeabilidad relativa. Así, la expresión (7-25) queda:

$$\mathbf{B}_{A-P} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{q[\mathbf{V}_A \wedge \mathbf{r}_{A-P}]}{r^3_{A-P}} \tag{7-28}$$

En la Figura 7-10 puede verse que teniendo **B** la dirección que da la regla del sacacorchos, el campo eléctrico creado por la carga q^+, **E**, tiene la dirección del radio OA; existiendo **B** solo cuando aquella carga está en movimiento, mientras que **E** se manifiesta también en reposo. Por otro lado, el campo eléctrico sobre cualquier carga q' actúa con una fuerza dada por $\mathbf{f} = q' \cdot \mathbf{E}$, y **B** lo hace con una fuerza de Lorentz (7-1); $\mathbf{f}' = q'[\mathbf{V}' \wedge \mathbf{B}]$. Por tanto, si la carga q' se mueve respecto a la carga q, sobre la primera actuará simultáneamente el campo eléctrico y el magnético con una fuerza $\mathbf{F} = q'\mathbf{E} + q'[\mathbf{V}' \wedge \mathbf{B}]$.

$$\Rightarrow \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{1-A} + \mathbf{F}'_{1-A} = q_A \mathbf{E}_{1-A} + q_A(\mathbf{V}_A \times \mathbf{B}_{1-A})$$ Fuerza de Lorentz

Campos magnéticos producidos por las corrientes

a) *Campo magnético creado por un elemento de corriente* (Ley de Biot-Savart o *segunda ley de Laplace*) (Fig. 7-11). Sea un conductor de sección S por el que se mueven n partículas positivas por unidad de volumen, con una velocidad de conjunto **V**. El número de partículas contenidas, pues, en un elemento de longitud Δl es: $nS\Delta l$, y, por tanto, el valor del campo creado por todas ellas será la suma de las acciones individuales dada por (7-28):

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{nS\Delta l q[\mathbf{V} \wedge \mathbf{r}]}{r^3}$$

Fuerza que ejerce un campo inductor $\mathbf{B}$ sobre un elemento de corriente (7-29)

$\mathbf{F} = I \int d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$

$d\mathbf{l}$ tiene el mismo sentido de $\mathbf{I}$

pero como la intensidad es $i = nvqs$, al sustituir queda:

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{I}[\Delta \mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{r^3} \tag{7-30}$$

teniendo $\Delta \mathbf{l}$ carácter vectorial, coincidiendo su dirección en todo momento con la del vector velocidad con que se mueve la carga, es decir, con la dirección de la i. Campo mag. producido por un elemento de corriente

El módulo de $\Delta \mathbf{B}$ es:

$$\Delta B = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot \Delta l \cdot \operatorname{sen} \alpha}{r^2} \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{I(d\mathbf{l} \times \mathbf{r})}{r^3}} \tag{7-31}$$

Ley de Biot-Savart

expresión encontrada por Laplace.

b) *Campo magnético creado por una corriente rectilínea* (~~*ley de Biot y Savart*~~). Si integramos los campos magnéticos elementales dados por la (7-31) podemos hallar el campo magnético total creado por una corriente rectilínea indefinida (Fig. 7-11).

vea también pág 169-170

como $$B = \Sigma \Delta B = \int_0^{\pi} \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot \operatorname{sen} \alpha \, r}{r^3} dl = \int_0^{\pi} \frac{\mu}{4\pi} \frac{I}{r^2} \operatorname{sen} \alpha \, dl$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{l}, \quad l = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad dl = ad(\operatorname{cotg} \alpha)\, dx$$

$$dl = -\frac{a}{\operatorname{sen}^2 \alpha} dx$$

$$dB = \frac{\mu}{4\pi} \frac{-Ia \operatorname{sen} \alpha}{r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} dx = \frac{\mu}{4\pi} \frac{-I \operatorname{sen} \alpha}{a} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} \alpha = \dfrac{a}{r}, \quad a = r \operatorname{sen} \alpha \\ a^2 = r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \end{array} \right.$$

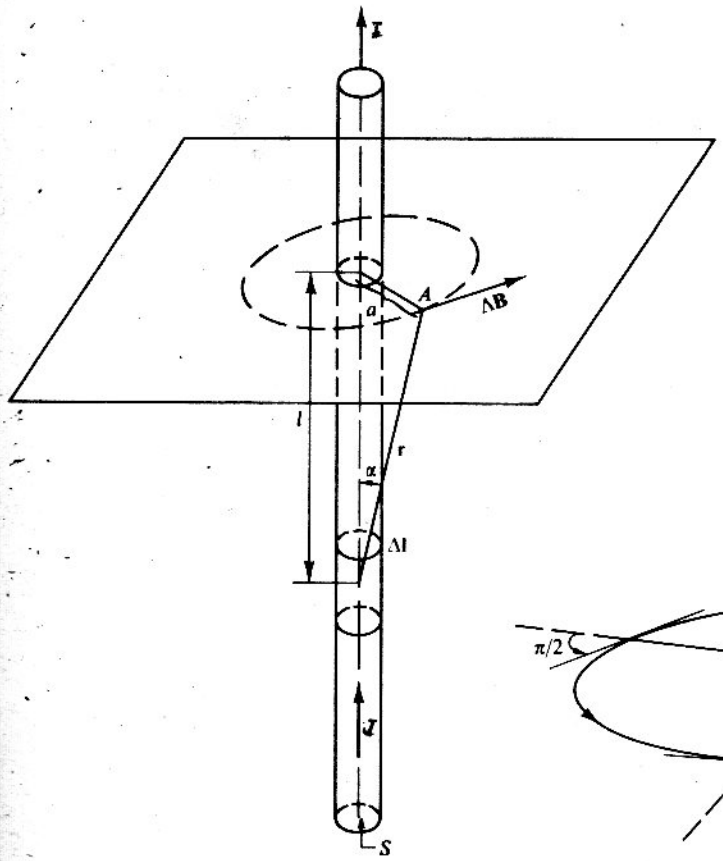


Figura 7-11

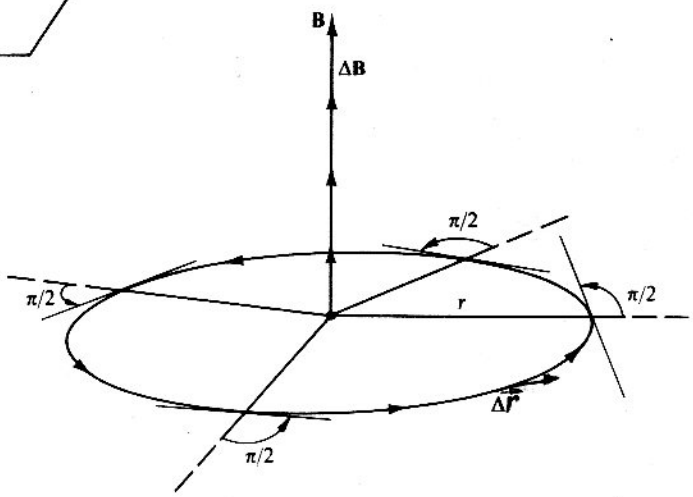


Figura 7-12

$$B = \int dB = -\frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{I}{a} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \gamma \, d\gamma = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{I}{a} \left[\cos \alpha\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{\mu i}{4\pi a} [1-(-1)] = \frac{2\mu I}{4\pi a} = \frac{\mu I}{2\pi a}$$

siendo a la distancia del conductor a la envolvente cilíndrica donde el campo magnético es el encontrado. Llamando a esta distancia r, se tiene:

$$B = \mu \frac{I}{2\pi r} \qquad \text{(7-32)}$$

a una distancia r de un alambre recto de longitud infinita, que transporta una corriente i

siendo $\mu \dfrac{I}{2\pi} = C$ (constante), pudiendo expresar la ley de Biot y Savart de este modo:

$$B = C \frac{I}{r} \qquad \text{(7-33)}$$

c) *Campo creado por una espira.* Sumando todas las acciones elementales $\Delta \mathbf{B}$ que ejercen todos los elementos de corriente de una espira o conductor circular puede hallarse el campo magnético total que determina en su centro. Partiendo de la expresión (7-31) y teniendo en cuenta (Fig. 7-12) que forma r' (radio de la espira) un ángulo de $\pi/2$ con la longitud Δl, se puede encontrar el campo magnético total sumando simplemente los campos elementales que cada elemento de la espira determina, que son además todos iguales: ($\Sigma \Delta l = 2\pi r$).

vea también págs: 170-171

$$\mathbf{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \cdot \frac{2\pi r}{r^2} = \mu \frac{I}{2r} \qquad \text{(7-34)}$$

siendo la resultante un vector normal al plano de la espira, y de sentido tal que sigue la regla del sacacorchos.

La relación existente entre el sentido de la corriente y el del campo queda expuesta en la Figura 7-13. La cara en que la corriente tiene sentido opuesto al de las agujas del reloj tiene flujo saliente, según la regla del sacacorchos, y se nombra por cara norte de la espira. Todo lo contrario sucede en la cara opuesta, cara sur de la espira. Una forma simple de determinar el signo N o S de una cara es la de dibujar la inicial N o S según coincidan con las flechas que indican el sentido de la corriente [Fig. 7-13(b)].

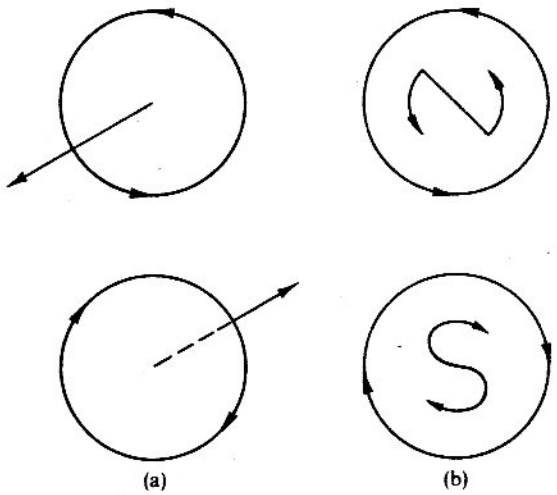


Figura 7-13

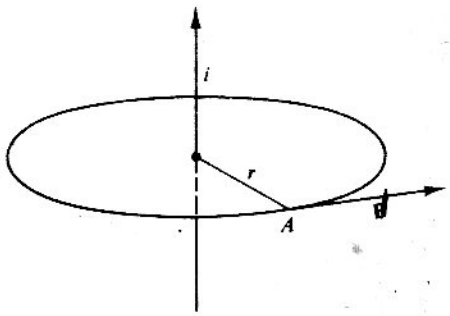


Figura 7-14

Teorema de la circulación. Campo en el interior de un solenoide. La expresión (7-32) puede escribirse de esta forma:

$$B \cdot 2\pi r = \mu I \tag{7-35}$$

El primer miembro se denomina «circulación del vector **B**» a lo largo de la circunferencia de radio r (Fig. 7-14). Esta expresión es válida para la circulación de **B** en cualquier trayectoria cerrada, siempre que toda ella esté situada en el mismo medio y atravesada por una corriente i. De un modo general:

$$\Sigma \mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{r} = \mu \cdot \Sigma I \quad \text{(ley de Ampère)} \quad \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu i \tag{7-36}$$

NOTA: Para encontrar el campo magnético B de un alambre por donde circula una corriente, se lo puede hallar ya sea con la ley de Biot-Savart o con la ley de Ampere, ya que con cualquiera que se utilice llegará al mismo resultado

Sea el caso del solenoide de forma toroidal [Fig. 7-15(a)]. Siendo N el número de espiras que lo constituyen, pasará, pues, por su centro, perpendicular al plano del papel, una intensidad Ni; por tanto, a lo largo de la circunferencia media del toroide tendremos:

$$B \cdot 2\pi r = \mu N I \tag{7-37}$$

es decir:

$$B = \mu \frac{NI}{2\pi r} = \mu \frac{NI}{l} = \mu n I \quad \text{en el interior de un toroide} \tag{7-38}$$

siendo $l = 2\pi r$ la longitud de la circunferencia media del toroide, y $n = \frac{N}{l}$ el número de espiras por unidad de longitud.

La última fórmula nos da el valor del campo en el interior de un solenoide, tanto en forma toroidal como extendido.

en el interior de un solenoide o bobina $B = \mu \frac{NI}{l} = \mu n I \Rightarrow \Phi_m = \mu \frac{Ni}{l} A$

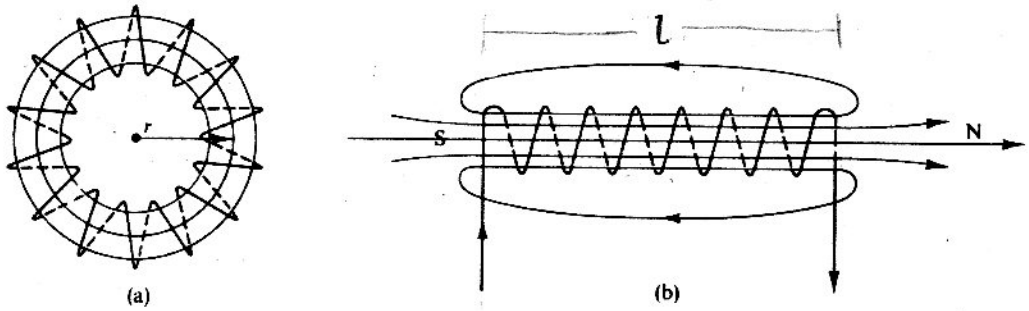


Figura 7-15

Las líneas de fuerza se cierran por el interior del solenoide en el caso en que éste sea de forma toroidal; pero si es longitudinal, éstas suben de la cara N y por el exterior se dirigen hacia la cara S. En uno y en otro el campo es uniforme (líneas de fuerza paralelas).

→ Vea págs 171 – 173

Acciones mutuas entre corrientes paralelas. Sean dos conductores paralelos separados una distancia d, y recorridos por corrientes i_1 e i_2. En virtud de las acciones electromagnéticas estudiadas, entre ambos existirá una fuerza atractiva o repulsiva según que las corrientes circulen en sentido igual u opuesto. La corriente i_1 crea un campo magnético $\mathbf{B}_1$ sobre cualquier otro punto del otro circuito, determinando, al actuar sobre i_2, una fuerza F_2 en el segundo conductor:

$$F_2 = B_1 l_2 i_2 \tag{7-39}$$

El flujo magnético Φ_m a través de una superficie $\Phi_m = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ → Ley de Gauss del Magnetismo: $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$ establece que el flujo neto através de cualquier superficie cerrada es cero o nulo. Esto es, no existen polos magnéticos aislados (o monopolos magnéticos)

PROBLEMAS RESUELTOS (117 – 126)

y más problemas resueltos (173 – 182)

Problema 7-1 ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre dos imanes de 500 microwebers? Tienen 15 centímetros de largo y están separados 10 centímetros.

Solución. Las tres fuerzas que actúan sobre los imanes son: *a*) la atracción entre el polo norte y sur, que están próximos; *b*) la atracción entre el polo norte y sur, separados; *c*) la repulsión entre los dos polos, norte y sur.

a) La atracción entre el polo norte y sur, que están separados 10 cm:

$$F = \frac{m_1 m_2}{4\pi\mu_0 r^2} = \frac{(500 \cdot 10^{-6}\ \text{wb})(500 \cdot 10^{-6}\ \text{wb})}{(1{,}58 \cdot 10^{-5}\ \text{N/A}^2)(0{,}1\ \text{m})^2} = \frac{(500 \cdot 10^{-6}\ \text{N} \cdot \text{m/A})(500 \cdot 10^{-6}\ \text{N} \cdot \text{m/A})}{(1{,}58 \cdot 10^{-5}\ \text{N/A}^2)(0{,}1\ \text{m})^2} = 1{,}58\ \text{N (atrac.)}$$

b) La atracción entre los polos norte y sur, que están separados 40 cm:

$$F = \frac{m_1 m_2}{4\pi\mu_0 r^2} = \frac{(500 \cdot 10^{-6}\ \text{wb})(500 \cdot 10^{-6}\ \text{wb})}{(1{,}58 \cdot 10^{-5}\ \text{N/A}^2)(0{,}4\ \text{m})^2} = \frac{(500 \cdot 10^{-6}\ \text{N} \cdot \text{m/A})(500 \cdot 10^{-6}\ \text{N} \cdot \text{m/A})}{(1{,}58 \cdot 10^{-5}\ \text{N/A}^2)(0{,}16\ \text{m}^2)} = 0{,}099\ \text{N (atrac.)}$$

c) La repulsión entre los dos polos norte y la de los dos sur, que están separados 25 cm:

$$F = \frac{m_1 m_2}{4\pi\mu_0 r^2} = \frac{(500 \cdot 10^{-6}\ \text{wb})(500 \cdot 10^{-6}\ \text{wb})}{(1{,}58 \cdot 10^{-5}\ \text{N/A}^2)(0{,}25\ \text{m})^2} = \frac{(500 \cdot 10^{-6}\ \text{N} \cdot \text{m/A})(500 \cdot 10^{-6}\ \text{N} \cdot \text{m/A})}{(1{,}58 \cdot 10^{-5}\ \text{N/A}^2)(6{,}25 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^2)} = 0{,}25\ \text{N (repuls.)}$$

Como las dos repulsiones son iguales en magnitud tendremos una repulsión total de 0,5 N. Las fuerzas de atracciones son de 1,58 N y 0,099 N y la de repulsión 0,5 N. La fuerza neta que actúa es:

$$1{,}58\ \text{N} + 0{,}099\ \text{N} - 0{,}5\ \text{N} = 1{,}18\ \text{N (atracción)}$$

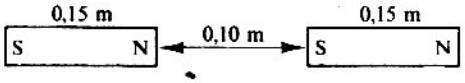


Figura 7-16

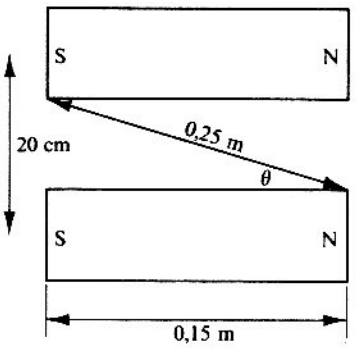


Figura 7-17

Problema 7-2 Dos imanes de 15 centímetros de longitud se colocan como lo indica la Figura 7-17. ¿Cuál es la fuerza vertical de repulsión si las intensidades de los polos son de 200 microwebers?

Solución. Las fuerzas que actúan sobre los imanes son: *a*) repulsión entre los dos polos sur; *b*) repulsión entre los dos polos norte; *c*) atracción entre dos polos sur y dos polos norte.

a) Repulsión entre los dos polos sur:

$$F = \frac{m_1 m_2}{4\pi\mu_0 r^2} = \frac{(200 \cdot 10^{-6}\ \text{wb})(200 \cdot 10^{-6}\ \text{wb})}{(1{,}58 \cdot 10^{-5}\ \text{N/A}^2)(0{,}2\ \text{m})^2} = 0{,}063\ \text{N}$$

b) Repulsión entre los dos polos norte:

$$F = \frac{m_1 m_2}{4\pi\mu_0 r^2} = \frac{(200 \cdot 10^{-6}\ \text{wb})(200 \cdot 10^{-6}\ \text{wb})}{(1{,}58 \cdot 10^{-5}\ \text{N/A}^2)(0{,}2\ \text{m})^2} = 0{,}063\ \text{N}$$

c) Atracción entre dos polos norte y dos polos sur: Existen dos fuerzas de atracción entre los dos polos sur y los dos polos norte. La fuerza de atracción es el doble de una de estas fuerzas, puesto que las distancias que separan los imanes son iguales. Según la Figura 7-17 se obtiene: $(NS)^2 = (0{,}2\ \text{m})^2 + (0{,}15\ \text{m}) = 0{,}0625\ \text{m}^2$ y, por tanto, $NS = 0{,}25$ m. Entonces la fuerza total de atracción es:

$$F = 2 \cdot \frac{m_1 m_2}{4\pi\mu_0 r^2} = 2 \cdot \frac{(200 \cdot 10^{-6}\ \text{wb})(200 \cdot 10^{-6}\ \text{wb})}{(1{,}58 \cdot 10^{-5}\ \text{N/A}^2)(0{,}25\ \text{m})^2} = 0{,}081\ \text{N}$$

Esta fuerza de 0,081 N actúa diagonalmente entre los polos. La componente vertical de esta fuerza es igual a 0,081 N · sen θ. Como sen $\theta = 0{,}20/0{,}25$, entonces la fuerza vertical es igual a 0,081 N · (0,2/0,25) = 0,065 newtons.

Por consiguiente, la fuerza resultante es:

$$0{,}063\ \text{N (repulsión)} + 0{,}063\ \text{N (repulsión)} - 0{,}065\ \text{N (atracción)} = 0{,}061\ \text{N (repulsión)}$$

Problema 7-3 *a*) ¿Cuál es la fuerza que ejerce sobre un polo de 200 microwebers de intensidad por un punto donde el campo magnetizante es de 300 newtons/weber? *b*) ¿Cuál es la excitación magnética en un punto a 0,03 metros de un polo de 50 microwebers de intensidad?

Solución. *a*) Como $F = Hm$, $F = 300\ \text{N/wb} \cdot 200 \cdot 10^{-6}\ \text{wb} = 0{,}06\ \text{N}$.

b) $$H = \frac{m}{4\pi\mu_0 r^2} = \frac{50 \cdot 10^{-6}\ \text{wb}}{(1{,}58 \cdot 10^{-5}\ \text{N/A}^2)(0{,}03)^2\ \text{m}^2} = 3516\ \text{wb/(N} \cdot \text{m}^2\text{/A}^2) = 3516\ \text{N/wb} = 3516\ \text{A} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Problema 7-4 ¿Cuál es el campo magnetizante en el punto medio de la distancia que separa los polos de un imán en forma de U si los polos están separados 20 centímetros y la intensidad del polo es de 500 microwebers?

Solución. Como el punto dado es equidistante de los polos para una unidad del polo norte colocada en el punto medio que separa a los polos, el campo magnetizante es:

$$H = \frac{m}{4\pi\mu_0 r^2} = \frac{500 \cdot 10^{-6} \text{ wb}}{(1{,}58 \cdot 10^{-5} \text{ N/A}^2)(0{,}1 \text{ m})^2} = 3160 \text{ N/wb}$$

Sin embargo, como es una cantidad vectorial, la que produce el polo sur del imán (que actúa sobre una unidad del polo norte) se ejerce hacia la izquierda y la producida por el polo norte del imán se ejerce hacia la izquierda; por tanto, la excitación magnética es el doble de 3160 N/wb, o 6320 N/wb, dirigida hacia el polo sur.

Problema 7-5 Las intensidades de los polos de un imán de 8,66 centímetros de longitud son de 240 unidades de polo. ¿Cuál es la intensidad del campo en el punto que indica la Figura 7-18?

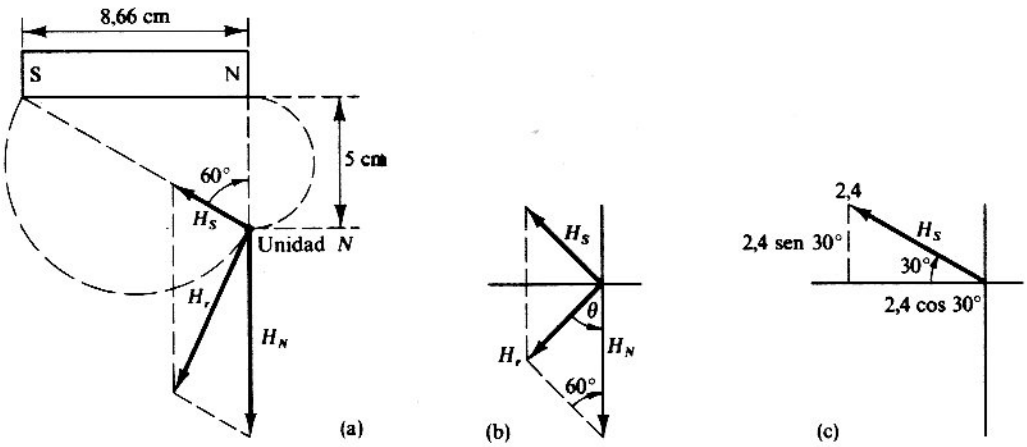


Figura 7-18

Solución. El polo norte del imán ejerce una fuerza de repulsión sobre la unidad de polo norte N. El vector H_N apunta hacia abajo, entonces la intensidad magnética es H_N. El polo sur atrae la unidad de polo norte N y se indica con H_S y apunta hacia el polo sur del imán. El vector suma H_r da la intensidad y dirección del campo resultante en el punto N. En el sistema c.g.s. de unidades, la fuerza sobre el polo unidad N ejercida por el polo norte del imán es:

$$H_N = K\frac{m}{r^2} = \frac{240}{5^2} = 9{,}6 \text{ oersted}; \quad H_S = \frac{240}{10^2} = 2{,}4 \text{ oersted}$$

Empleando la ley de los cosenos se halla que:

$$H_r = \sqrt{9{,}6^2 + 2{,}4^2 - 2 \cdot 9{,}6 \cdot 2{,}4 \cdot \cos 60^\circ} = 8{,}6 \text{ oersted}$$

Esta fuerza actúa formando un ángulo:

$$\text{sen } \theta/2{,}4 = \text{sen } 60^\circ/8{,}6 \quad \therefore \theta = 14^\circ$$

Entonces la excitación magnética en el punto que se muestra es de 8,6 oersted y actúa formando un ángulo de 256° con el eje X. Otro método para hallar H_r es descomponer los vectores en sus componentes, como se indica en la Figura (c). Las componentes de H_S según los dos ejes son:

$$H_{S_y} = 2{,}4 \text{ sen } 30^\circ = 1{,}2 \text{ oersted}$$
$$H_{S_x} = -2{,}4 \cos 30^\circ = -2{,}07 \text{ oersted}$$

Las componentes de H_N según los dos ejes son:

$$H_{N_x} = 0 \text{ oersted}$$
$$H_{N_y} = -9{,}6 \text{ oersted}$$

Sumando vectorialmente se encuentra que: $H_x = -2{,}07$ oersted y $H_y = -9{,}6 + 2 = -8{,}4$ oersted. La intensidad resultante del campo es: $H_r = \sqrt{8{,}4^2 + (-2{,}07)^2} = 8{,}65$ oersted.

La dirección de H_r es: tg $\theta = 8{,}4/2{,}07 = 76°$ o $256°$ con el eje X.

Densidad de flujo

Problema 7-6 La intensidad de un polo es de 500 microwebers y se coloca en el centro de una esfera de 10 centímetros de radio. ¿Cuál es el flujo total que sale del polo y cuál es la densidad de flujo en la superficie de la esfera?

Solución. El flujo total = $4\pi \cdot$ número de webers = $4\pi \cdot 500 \cdot 10^{-6}$ wb = $2000\pi \cdot 10^{-6}$ wb.

El área total de la esfera = $4\pi r^2 = 4\pi \cdot 10^{-2}$ m^2.

La densidad de flujo = $\dfrac{\text{flujo total}}{\text{área total}} = \dfrac{2000\pi \cdot 10^{-6} \text{ wb}}{4\pi \cdot 10^{-2} \text{ m}^2} = 5 \cdot 10^{-2}$ wb/m^2.

Problema 7-7 Un imán produce una densidad de flujo de $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ webers/metro cuadrado. Si se coloca un polo de 100 microwebers de intensidad en este campo, ¿qué fuerza ejerce sobre el polo?

Solución. Como la densidad de flujo $B = \mu_0 H$, se puede hallar H. Entonces, como $F = Hm$, se puede calcular F. Por tanto,

$$H = B/\mu_0 = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ wb/m}^2}{1{,}257 \cdot 10^{-5} \text{ N/A}^2} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ N-m/A-m}^2}{1{,}257 \cdot 10^{-5} \text{ N/A}^2} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ N}}{1{,}257 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m/A}} = 2 \cdot 10^3 \text{ N/wb}$$

Ahora, empleando $F = Hm$, $F = 2 \cdot 10^3$ N/wb $\cdot 100 \cdot 10^{-6}$ wb = 0,2 N.

Problema 7-8 ¿Cuál es la densidad de flujo magnético en un punto situado a 20 centímetros del centro de un imán de longitud 10 centímetros, siendo la intensidad del polo 25 microwebers?

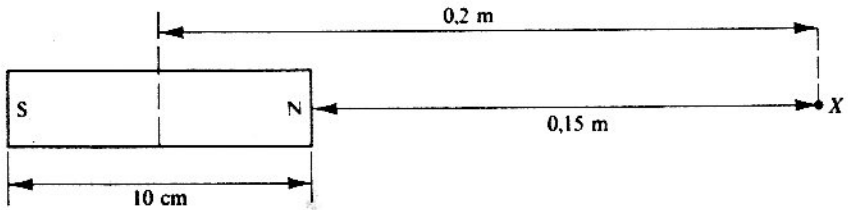


Figura 7-19

Solución. Empleando la fórmula $B = m/4\pi r^2$ se puede calcular la densidad de flujo producida por cada polo, y como actúan sobre la misma recta, en direcciones opuestas, la diferencia es la densidad de flujo resultante (porque la densidad de flujo es un vector).

La densidad de flujo producida por el polo norte = $\dfrac{m}{4\pi r^2} = \dfrac{25\ \mu\text{wb}}{4\pi(0{,}15 \text{ m})^2} = 88{,}4\ \mu\text{wb/m}^2$.

La densidad de flujo producida por el polo sur = $\dfrac{m}{4\pi r^2} = \dfrac{25\ \mu\text{wb}}{4\pi(0{,}25 \text{ m})^2} = 31{,}7\ \mu\text{wb/m}^2$.

La densidad de flujo resultante = $88{,}4\ \mu\text{wb/m}^2 - 31{,}7\ \mu\text{wb/m} = 56{,}7\ \mu\text{wb/m}^2$.

Problema 7-9 La densidad de flujo del campo magnético de la Tierra en determinado punto es $44 \cdot 10^{-6}$ webers/metro cuadrado, y el ángulo de declinación de 60°. ¿Cuál es la intensidad horizontal del campo en este punto? Si la componente horizontal del campo magnético de la Tierra es de 16 microwebers/metro cuadrado y el ángulo de declinación de 60°, ¿cuánto flujo magnético pasa por un área de 5 metros cuadrados?

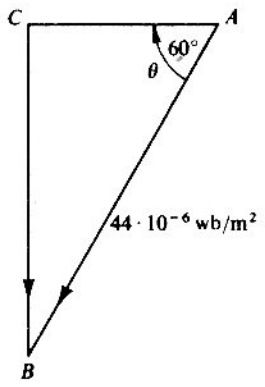


Figura 7-20

Solución. La componente horizontal está sobre AC y $AC = AB \cos\theta$; por tanto,

$$AC = 44 \cdot 10^{-6}\ \text{wb/m}^2 \cdot \cos 60^\circ = 44 \cdot 10^{-6}\ \text{wb/m}^2 \cdot 0{,}5 = 22 \cdot 10^{-6}\ \text{wb/m}^2$$

La componente vertical está sobre la recta CB y $CB = AC \operatorname{tg}\theta = 16\ \mu\text{wb/m}^2 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = (16\ \mu\text{wb/m}^2) \cdot 1{,}73 = 27{,}7\ \mu\text{wb/m}^2$. El flujo magnético que pasa por la superficie de 5 m^2 es:

$$27{,}7\ \mu\text{wb/m}^2 (5\ \text{m})^2 = 692\ \mu\text{wb}$$

OJO **Problema 7-10** Un deuterón recorre una trayectoria circular de radio 50 centímetros en un campo magnético de densidad de flujo 1 weber/metro cuadrado. *a*) Calcule la velocidad del deuterón. *b*) Halle el tiempo necesario para que dé una revolución. *c*) ¿A qué diferencia de potencial debe ser acelerado el deuterón para adquirir esta velocidad?

Solución. *a*) La órbita de la partícula es una circunferencia recorrida a velocidad constante; la fuerza centrípeta es $m \cdot v^2/R$ y que debe ser igual a la fuerza ejercida sobre la carga móvil, que es qvB, o sea,

$$m \cdot \frac{v^2}{R} = qvB$$

de donde: $$v = \frac{q \cdot B \cdot R}{m} = \frac{1{,}6029 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot (0{,}5)}{2(1{,}67 \cdot 10^{-27})} = \frac{1{,}6029 \cdot (0{,}5)}{3{,}34} \cdot 10^8 = 0{,}24\ 10^8\ \text{m/seg}$$

b) Por ser la velocidad tangencial constante, el movimiento del deuterón es uniforme, y el tiempo necesario para que dé una revolución es:

$$t = e/v = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2 \cdot 3{,}1416 \cdot (0{,}5)}{3{,}8 \cdot 10^7} = 13{,}08 \cdot 10^{-8}\text{seg}$$

c) La diferencia de potencial que se necesita para producir la misma energía cinética del deuterón se calcula a partir de la relación $\frac{1}{2} mv^2 = qV$, siendo qV el trabajo eléctrico. Entonces:

$$\text{V} = \frac{mv^2}{2q} \quad \therefore\ V = \frac{q \cdot B^2 R^2}{2m} = \frac{1{,}6029 \cdot 10^{-19} \cdot 1^2 \cdot (0{,}5)^2}{2(3{,}34 \cdot 10^{-27})} = 5{,}9 \cdot 10^6\ \text{V}$$

que es la diferencia de potencial que se pide.

Problema 7-11 Si la carga que se muestra en la Figura 7-21 es un protón ($m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kilogramos, $q = +e$) que se mueve a una velocidad de 10^6 metros por segundo, y si el radio del círculo es de 4 centímetros, halle la magnitud de la inducción **B**.

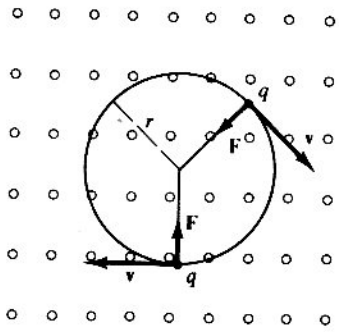


Figura 7-21

Solución. La fuerza que se ejerce sobre la carga es $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, y debe proveer la fuerza centrípeta mv^2/r. Igualando se obtiene: $mv^2/r = qvB \operatorname{sen} \theta$. Como el ángulo entre **v** y **B** es $\theta = \pi/2$, entonces sen $\theta = 1$. Por tanto,

$$B = mv/rq = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 10^6}{(0{,}04)(1{,}6029 \cdot 10^{-19})} = 0{,}26 \text{ wb/m}^2 = 2600 \text{ G}$$

Problema 7-12 Un protón se dispara con velocidad de $10 \cdot 10^5$ metros por segundo a lo largo de una recta que forma un ángulo de 37° con el eje X. Si existe un campo magnético uniforme de 0,2 webers/metro cuadrado y paralelo al eje X, describa el movimiento del protón.

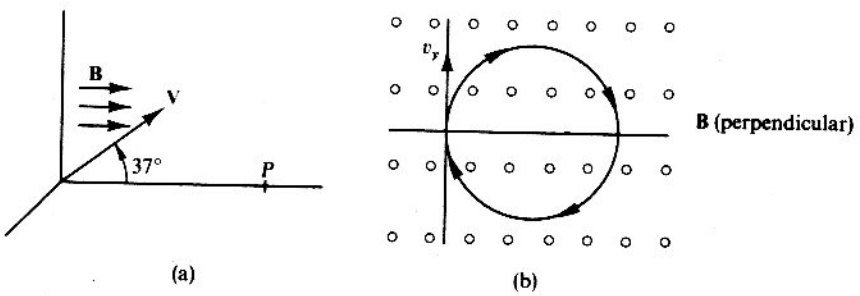


Figura 7-22

Solución. Es conveniente descomponer la velocidad v en dos componentes, una perpendicular y la otra paralela al campo. Como el campo se da en la dirección del eje X, la componente x de la velocidad no resulta afectada. Entonces:

$$F_1 = qv_xB_x \operatorname{sen} \theta = 0, \text{ porque sen } \theta = 0$$

Por tanto, la partícula se mueve en la dirección del eje X con una velocidad:

$$v_x = 10 \cdot 10^5 \cos 37° = 8 \cdot 10^5 \text{ m/seg}$$

La componente y de **v** es perpendicular al campo. Si se mira la partícula como lo indica la Figura 7-22(b) es equivalente al problema anterior. La partícula recorre una circunferencia como resultado de la interacción entre **v** y **B**. Igualando la fuerza centrípeta y magnética se obtiene:

$$mv_y^2/r = qv_yB \quad \therefore r = \frac{mv_y}{qB} = 0{,}031 \text{ m}$$

El tiempo que emplea es $t = \frac{2\pi r}{v_y} = 3{,}2 \cdot 10^{-7}$ seg para que el protón recorra el círculo. Durante este tiempo viaja con una velocidad de $v = 8 \cdot 10^5$ m/seg, paralelo al eje X, y después de completar el círculo está de nuevo en P sobre el eje.

La distancia OP es: $OP = v_x t = 0{,}26$ m.

Esto muestra que el protón sigue una trayectoria helicoidal de radio 3,1 cm y 0,26 m. de avance.

Problema 7-13 El electrón del punto A lleva una velocidad de $v = 10^8$ metros por segundo. Halle: *a*) El valor y sentido de la inducción magnética, que hace que el electrón siga una trayectoria semicircular de A a B. *b*) El tiempo que emplea en recorrer el arco AB.

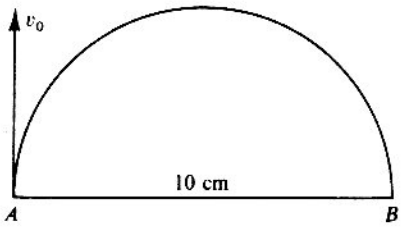


Figura 7-23

Solución. *a*) De la igualdad que existe entre las fuerzas centrípeta y la ejercida sobre la carga móvil $qv_0B = mv_0^2/R$ resulta que la inducción magnética que obliga al electrón a seguir dicha trayectoria es:

$$B = mv_0/qR = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 10^8}{1{,}6029 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = 1{,}14 \cdot 10^{-2} \text{ wb/m}^2$$

El sentido del campo magnético es hacia el lector y se determina mediante la regla de la mano izquierda.

b) Como la velocidad tangencial es constante, el movimiento es uniforme y el tiempo que emplea en recorrer el arco AB es:

$$t = \frac{\pi R}{v_0} = \frac{3{,}1416 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{10^8} = 1{,}57 \cdot 10^{-9} \text{ seg}$$

Problema 7-14 En un modelo de espectrógrafo de masas las partículas pasan por un selector de velocidad antes de entrar al campo magnético, y por otro las partículas pasan por un campo eléctrico intenso antes de entrar al campo magnético. Compare las relaciones que existen entre los radios de iones cargados de litio de masas 6 u.m.a. y 7 u.m.a. en los dos casos.

Solución. En el campo magnético el ion se mueve en un círculo, la fuerza magnética que se ejerce sobre él provee la fuerza centrípeta necesaria.

Entonces $qvB = mv^2/R$ o $v = qBR/m$. Cuando los iones han pasado por el selector de velocidad, los dos iones de litio tienen la misma velocidad. Tienen la misma velocidad y están en un campo con la misma densidad de flujo magnético. Así, $R_6/m_6 = R_7/m_7$.

$$\therefore \frac{R_6}{R_7} = \frac{m_6}{m_7} = \frac{6}{7} = 0{,}857$$

Después de que los iones pasan por el campo eléctrico intenso han adquirido la misma energía. Según la ecuación anterior: $\frac{1}{2}mv^2 = q^2B^2r^2/2$ m.

$$\therefore \frac{r_6^2}{m_6} = \frac{r_7^2}{m_7} \quad \therefore \frac{r_6}{r_7} = \sqrt{\frac{m_6}{m_7}} = 0{,}926$$

Problema 7-15 Un ciclotrón tiene un oscilador de frecuencia 11,4 · Mc/seg y un radio de 60 centímetros. ¿Qué intensidad magnética se necesita para acelerar los protones de masa $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kilogramos y carga $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C y cuál es la energía final que adquieren?

Solución. La frecuencia angular de los protones en el ciclotrón está dada por $\omega = Bq/m$ o $f = Bq/2\pi m$.

$$\therefore B = \frac{2\pi fm}{q} = \frac{2\pi \cdot 11{,}4 \cdot 10^6/\text{seg}\,(1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg})}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} = 0{,}748\ \text{wb/m}^2$$

La energía final de los protones es:

$$1/2mv^2 = \frac{q^2B^2r^2}{2m} = \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19})^2(0{,}748)^2\ \text{wb}^2/\text{m}^4 \cdot (0{,}6^2\ \text{m}^2)}{2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}} = 0{,}154 \cdot 10^{-11}\ \text{J} =$$

$$= \frac{0{,}154 \cdot 10^{-11}\ \text{J}}{1{,}6 \cdot 10^{-13}\ \text{J MeV}^{-1}} = 9{,}64\ \text{MeV}$$

Como $E = mc^2$, esta energía es equivalente a un aumento de masa de:

$$\Delta m = \frac{0{,}154 \cdot 10^{-11}\ \text{J}}{9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{seg}^2} = 0{,}017(10^{-27}\ \text{kg})$$

El error es: $\frac{\Delta m}{m} \cdot 100 = \frac{0{,}017}{1{,}67} \cdot 100 = 1{,}02\ \%$.

Problema 7-16 Un ciclotrón funciona con una densidad de flujo de 1,5 webers/metro cuadrado. El ion que entra al campo es un protón que tiene una masa de $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kilogramos. Si la órbita máxima de la partícula es de 0,5 metros, halle: *a*) el voltaje necesario para poner en órbita el protón; *b*) la velocidad máxima del protón; *c*) la energía cinética de la partícula; *d*) el periodo y la frecuencia.

Solución. *a*) El voltaje necesario para poner en órbita el protón es:

$$V = \frac{B^2r_{max}^2}{2} \cdot \frac{q}{m} = \frac{1{,}5^2 \cdot (0{,}5)^2}{2} \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}} = 2{,}7 \cdot 10^7\ \text{V}$$

b) La velocidad máxima del protón es:

$$v_{max} = Br_{max}\,\frac{q}{m} = 1{,}5 \cdot (0{,}5)\,\frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}} = 7{,}185 \cdot 10^7\ \text{m/seg}$$

c) La energía cinética de la partícula es:

$$E_c = \frac{B^2r_{max}^2q^2}{2m} = \frac{1{,}5^2(0{,}5)^2 \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-19})^2}{2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}} = 4{,}31 \cdot 10^{-12}\ \text{J}$$

d) El periodo y la frecuencia para medio ciclo son:

$$t = \frac{\pi m}{Bq} = \frac{3{,}14 \cdot (1{,}67) \cdot 10^{-27}}{1{,}5(1{,}6) \cdot 10^{-19}} = 2{,}185 \cdot 10^{-8}\ \text{seg}$$

$$f = \frac{Bq}{2\pi m} = \frac{1{,}5 \cdot (1{,}6) \cdot 10^{-19}}{2\pi(1{,}67) \cdot 10^{-27}} = 2{,}29 \cdot 10^7\ \text{seg}^{-1}$$

Problema 7-17 Un anillo circular de hierro tiene un área seccional de 0,006 metros cuadrados y un diámetro promedio de 0,3 metros. Si está envuelto uniformemente por 2000 vueltas de alambre que transporta una corriente de 2,5 amperios, ¿cuál es el flujo total producido? La permeabilidad del hierro es $1{,}1 \cdot 10^{-3}$ wb/A · m.

Solución. A partir de la fórmula flujo $= NI/(l/\mu A)$, primero se debe hallar la longitud del circuito, l, o sea, $l = \pi d = \pi(0{,}3) = 3{,}14 \cdot (0{,}3) = 0{,}94$ m. Entonces:

$$\text{flujo} = NI/(l/\mu A) = \frac{2000 \text{ vueltas} \cdot 2{,}5 \text{ A}}{0{,}94 \text{ m}/(1{,}1 \cdot 10^{-3} \text{ wb/A} \cdot \text{m})(0{,}006 \text{ m}^2)} = 0{,}036 \text{ wb}$$

Problema 7-18 En un anillo circular de hierro de área seccional 0,002 metros cuadrados y de diámetro promedio 15 centímetros, ¿cuántos amperios-vuelta se necesitan para que se produzca un flujo total de 0,1 weber en el circuito si la permeabilidad del hierro es 1100 veces la del aire?

Solución. Flujo total $= \dfrac{NI}{l/\mu A}$; por tanto, $NI =$ flujo $(l/\mu A)$. El valor de $l = \pi d = 3{,}14 \cdot (0{,}15 \text{ m}) = 0{,}471$ m. También debemos calcular el valor de μ para el hierro. Para el aire es $1{,}257 \cdot 10^{-6}$ wb/A-m; por tanto, para el hierro es: $1100 \cdot 1{,}257 \cdot 10^{-6}$ wb/A · m $= 1{,}38 \cdot 10^{-3}$ wb/A · m.

$$\text{Entonces, } NI = \text{flujo}\,(l/\mu A) = 0{,}1 \text{ wb} \cdot \frac{0{,}471 \text{ m}}{(1{,}38 \cdot 10^{-3} \text{ wb/A} \cdot \text{m})(0{,}002 \text{ m}^2)} = 1{,}6 \cdot 10^{4} \text{ A} \cdot \text{vuelta.}$$

Problema 7-19 Si se hace un corte de 5 milímetros de ancho al anillo del problema anterior, ¿cuántos amperios-vuelta se necesitan para mantener el mismo flujo?

Solución. Como el aire está conectado en serie con el núcleo de hierro, las reluctancias están en serie y, por tanto, se deben sumar. La longitud del núcleo de hierro es $(0{,}471 - 0{,}005)$ m $= 0{,}466$ m.

El número de amperios-vuelta, $NI =$ flujo $(l/\mu A)$, siendo $l/\mu A$ la reluctancia total del circuito.

$$\text{Reluctancia total} = \text{reluctancia}_{\text{hierro}} + \text{reluctancia}_{\text{aire}} = \frac{l}{\mu A_h} + \frac{l}{\mu A_a} =$$

$$= \frac{0{,}466 \text{ m}}{(1{,}38 \cdot 10^{-3} \text{ wb/A} \cdot \text{m})(0{,}002 \text{ m}^2)} + \frac{0{,}005 \text{ m}}{(1{,}257 \cdot 10^{-6} \text{ wb/A} \cdot \text{m})\, 0{,}002 \text{ m}^2}$$

$$= 1{,}69 \cdot 10^{5} \text{ A/wb} + 2 \cdot 10^{6} \text{ A/wb} = 2{,}17 \cdot 10^{6} \text{ A/wb}$$

Entonces, $NI =$ flujo $(l/\mu A) = 0{,}1$ wb $\cdot\, 2{,}17 \cdot 10^{6}$ A/wb $= 2{,}16 \cdot 10^{5}$ A · vuelta, lo cual muestra que al hacerle este tipo de rendijas aumenta el número de amperios-vuelta necesarios para mantener el mismo flujo.

Problema 7-20 Un anillo de Rowland está hecho de hierro y la longitud media de la circunferencia es de 1 metro y área seccional 10 centímetros cuadrados. Tiene envuelto 1000 vueltas de alambre por el que pasa una corriente de 2 amperios. Si la permeabilidad relativa del hierro en estas condiciones es de 600, ¿cuál es la magnitud del flujo a través del anillo? ¿Cuál es el flujo a través del anillo si se le hace un corte de 2 centímetros de longitud y si el flujo no se expande de la rendija?

Solución. La inducción magnética a través de un anillo de Rowland está dada por:

$$B = \mu H = \mu \frac{NI_c}{l} = K_m \mu_0 \frac{NI_c}{l}$$

con I_c la corriente en el alambre. Entonces: $\phi = K_m \mu_0 A \dfrac{NI_c}{l}$. Por tanto,

$$\phi = 600 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2} \cdot 10 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \frac{1000 \cdot 2 \text{ A}}{1 \text{ m}} = 48\pi 10^{-5} \text{ wb}$$

siendo K_m la permeabilidad relativa de la sustancia: $K_m = \dfrac{\mu}{\mu_0}$.

Cuando se hace el corte al anillo, el flujo se calcula a partir de $\phi = \dfrac{\text{f.m.m.}}{R_1 + R_2}$, siendo f.m.m. la fuerza magnetomotriz y R_1 y R_2 las reluctancias del anillo y corte, respectivamente. Entonces:

$$\phi = \frac{NI_c}{(l_1/\mu_1 A_1) + (l_2/\mu_2 A_2)} =$$

$$= \frac{1000 \cdot 2 \text{ A}}{[0{,}98 \text{ m}/(600 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2} \cdot 10 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)] + [0{,}02 \text{ m}/(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2} \cdot 10 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)]} =$$

$$= 12{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ wb}$$

Problema 7-21 La longitud de la circunferencia media de un anillo de Rowlan de acero al silicio es de medio metro y su sección transversal de 4 centímetros cuadrados. Calcule la fuerza magnetomotriz y la intensidad de la corriente necesaria para establecer un flujo de 10 webers^{-4} en el anillo cuando se corta en éste un entrehierro de 1 milímetro de longitud. El anillo tiene enrolladas 200 vueltas de alambre.

Solución. La intensidad del flujo es:

$$B = \frac{\phi}{A} = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-4}} = 1 \text{ wb}$$

y su permeabilidad magnética correspondiente: $\mu = B/H = 6{,}25 \cdot 10^{-3}$ wb/A · m, porque $H = 160$ A-vueltas/m. La reluctancia del circuito magnético del anillo de acero al silicio es:

$$R_1 = \frac{l}{\mu A} = \frac{0{,}5}{6{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 2 \cdot 10^5 \text{ A-vuelta/wb}$$

y la reluctancia del entrehierro es:

$$R_2 = \frac{l'}{\mu_0 A} = \frac{0{,}001}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 19{,}8 \cdot 10^5 \text{ A-vuelta/wb}$$

La reluctancia equivalente del circuito magnético es $R = R_1 + R_2 = 21{,}8 \cdot 10^5$ A-vuelta/wb. De la relación $\phi = \text{f.m.m.}/R$ se obtiene f.m.m. $= \phi R$, y como también f.m.m. $= NI$, la intensidad de la corriente es:

$$I = \frac{\phi R}{N} = \frac{4 \cdot 10^{-4} \cdot 21{,}8 \cdot 10^5}{200} = 4{,}36 \text{ A}$$

La fuerza magnetomotriz es: f.m.m. $= \phi R = 872$ A-vuelta.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Una bobina de 10 espiras está colocada normalmente a un campo magnético de 0,68 weber. Calcule la fuerza electromotriz media inducida si gira a 2 revoluciones por segundo.
2. Halle el valor y el sentido de la fuerza electromotriz autoinducida en una bobina de 5,25 milihenrios si la intensidad de la corriente en ella crece uniformemente desde cero a 2 amperios en 0,3 segundos.
3. Un automóvil marcha a 90 kilómetros por hora perpendicularmente al meridiano magnético. Lleva una antena vertical de 1 metro de longitud. Sabiendo que la componente horizontal del campo magnético terrestre es de 0,22 gauss, calcule la fuerza electromotriz inducida en la antena.
4. Un carrete de 20 espiras y 2 centímetros cuadrados de sección se encuentra en un campo magnético de 0,5 miriagauss de forma que el flujo que lo atraviesa es máximo. Si se le aleja del campo durante 0,2 segundos, calcule: *a*) la fuerza electromotriz inducida; *b*) la intensidad media y la cantidad de electricidad puesta en movimiento.

   La resistencia del carrete es de 0,03 ohmios.

Sea: $\mathbb{E}_1$ el campo electrostático (es el creado por cargas ¡ separadas)

$\mathbb{E}_{F_1}$ el campo no electrostático o de Faraday debido a la variación de $\mathbb{B}_1$ sobre el inducido

$$\mathbb{F}'_1 = \frac{\mathbb{F}_{lorentz}}{q} = \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_F = \mathbb{E} + \mathbb{V}\times\mathbb{B}_1$$

$\rightarrow \mathbb{E}_{F_1} = \mathbb{V}\times\mathbb{B}_1$

como: $\mathcal{E}_{\hat{ab}} = \frac{W}{q} \Rightarrow$ para la sección de un alambre $\hat{ab}$:

$$\mathcal{E}_{\hat{ab}} = \int_a^b \mathbb{E}'_1 \cdot d\mathbb{r} \quad (1)$$

si es una espira $\Rightarrow \mathcal{E}_{\hat{aa}} = \int_a^a \mathbb{E}'_1 \cdot d\mathbb{r} = \oint \mathbb{E}'_1 \cdot d\mathbb{r} =$

si $\mathcal{E}_{\hat{aa}} = \mathcal{E}_\Phi \quad = \oint \mathbb{E}_1 \cdot d\mathbb{r}^{0} + \oint \mathbb{E}_F \cdot d\mathbb{r} =$

$\hookrightarrow \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_\Phi = \mathcal{E} = \oint \mathbb{E}_{F_1} \cdot d\mathbb{r}}$ donde $\mathbb{E}_{F_1} = \mathbb{V}\times\mathbb{B}_1$

donde $\mathbb{V}$: es la velocidad relativa entre el $\hat{ab}$ y un punto en el espacio (que puede ser móvil de modo que [redacted] valor cte. de la intensidad del [redacted] magnético.

Ley de Lenz: "la fem y la corriente inducidas, circulan en una dirección tal, que se opone a la causa que la produjo."

Esto quiere decir que el sentido de la fem y la corriente inducidas es tal que ella (la corriente inducida) tiende a compensar la variación del flujo que atraviesa al conductor

CAPITULO 8

Por el sentido que toma la corriente (debido a la ley de Lenz) hace que aparezca un campo magnético inducido resultante que al actuar con el campo mag. inductor da como resultado la aparición de una fuerza magnética que se opone al movimiento relativo entre el inductor y el inducido.

La dirección de la corriente inducida no puede ser paralela al vector del campo inductor magnético.

Inducción electromagnética:

FUERZA ELECTROTRIZ INDUCIDA:

Toda variación de flujo magnético sobre [redacted] un circuito cerrado provoca en éste una corriente inducida cuyo sentido se opone a la causa que la produce.

El valor absoluto de la fuerza electromotriz inducida es igual a la relación entre la variación de flujo magnético y el tiempo en que tiene lugar:

donde $\Phi_{m_1} = \int \mathbb{B}_1 \cdot d\mathbb{s}_1$

Una variación del Φ_m sobre la superficie de un alambre $\hat{ab}$ puede ser producida por cualquiera de los 2 casos siguientes
a) si $\mathbb{B} = f(x,y,z) \wedge \mathbb{B} \neq f(t)$, pero $\hat{ab}$ se mueve
b) si $\hat{ab}$ esta fijo, pero $\mathbb{B} = f(t)$

$$(2)\quad \mathcal{E}_{\hat{ab}_1} = \frac{-d\Phi_{m_1}}{dt} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{LEY DE} \\ \text{FARADAY} \end{array} \right. \quad (8\text{-}1)$$

y es directamente proporcional al número de espiras de la bobina:

[redacted] en un solenoide (bobina) [redacted] del inducido

igualando las ecuac.s (1) ∧ (2):

$$\mathcal{E}_{\hat{ab}} = +\int_a^b \mathbb{E}'_1 \cdot d\mathbb{r} = -\frac{d\Phi_{m_1}}{dt} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_1 = -N_1 \frac{d\Phi_{m_1}}{dt}} \quad (8\text{-}2)$$

Φ_m es el flujo resultante en el elemento 1

AUTO INDUCTANCIA ó INDUCTANCIA (PROPIA):

mide la eficiencia con la que un inductor guarda la energía magnética

[redacted] la variación del flujo $d\Phi$ es proporcional a la variación de la intensidad de la corriente dI (esto es así, solo, si no existen materiales ferromagnéticos)

$$\Rightarrow d\Phi_1 = k\,dI_1$$

(siendo k una constante de proporcionalidad determinada por las características del circuito). Se puede escribir la ecuación (8-2) en la forma:

$\mathcal{E}_{L_i} = -N\frac{d\Phi_{m_i}}{dt}$ fem autoinducida o voltaje de la autoinducción

$$\mathcal{E}_L = -Nk\frac{dI}{dt} \quad \text{o bien} \quad \mathcal{E}_{L_i} = +L_i\frac{dI_i}{dt} = -N_iK_i\frac{dI_i}{dt} \quad (8\text{-}3)$$

$\mathcal{E}_{L_i}$ Voltaje del inductor

haciendo $Nk = L$ definimos la constante de inducción, *inductancia* o *coeficiente de autoinducción* característica del circuito. $\Rightarrow N_iK_i = \boxed{L_i = N_i\frac{\Phi_{m_i}}{I_i}}$

inductancia o autoinductancia: su valor solo depende de: la forma del inductor (geometría, tamaño y # de espiras) y del tipo del material del inductor.

$\Phi_m = \int \mathbb{B}\cdot d\mathbb{s}$ (ver pág 131)

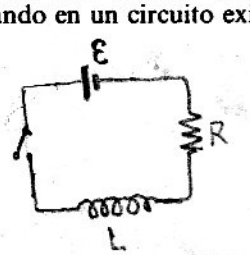
La unidad de inductancia es el henrio (H):

$$\mathrm{H} = \frac{\text{voltio}\cdot\text{segundo}}{\text{amperio}}$$

En un solenoide $L = \mu\frac{N^2}{l}A$ $\quad B = \frac{\mu N I}{l} = \frac{\Phi_m}{A}$

CIRCUITO EN SERIE R-L

Cuando en un circuito existe autoinducción, la ley de Ohm debe escribirse así:



o bien:

$$\mathcal{E}_L + \mathcal{E} = IR \rightarrow -L\frac{dI}{dt} + \mathcal{E} = IR$$

$$\mathcal{E} = L\frac{dI}{dt} + RI \Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{\mathcal{E}}{L} \quad (8\text{-}4)$$

El valor de la intensidad en cada instante se obtiene por integración de (8-4):

$$I = \boxed{I(t) = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$

Trabajo o energía magnética del inductor $W_L = W(t) = \frac{1}{2} L I^2$

siendo $\boxed{I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}}$ donde $\mathcal{E}$ es la fem que un generador da al circuito

Potencia del inductor $\mathcal{P}_L = \frac{dW}{dt} = IV = IL\frac{dI}{dt}$

Corrientes de Focault. Las corrientes de Focault son corrientes inducidas que se producen en un bloque metálico debido a la pequeña resistencia que las masas metálicas ofrecen cuando se halla sometido a una variación de flujo. Se caracterizan por las propiedades:

a) calientan el bloque en cuestión,
b) se oponen al movimiento que las produce,

producen pérdidas inútiles de energía y se evitan o atenúan construyendo las piezas con láminas de metal, perpendiculares a las corrientes, o paralelas al campo inductor B

Procedimiento para resolver problemas

La fuerza electromotriz inducida queda completamente determinada calculando la variación con que cambia el flujo magnético. En términos de la densidad del flujo, $B = \phi/A$. Además, $B = \mu H$; por tanto, $\phi = \mu AH$. También $E_i = -\frac{Nd\phi}{dt}$. En algunos problemas la fuerza electromotriz inducida se determina con facilidad calculando el flujo a través del circuito antes y después de que ha tenido lugar el cambio y dividiendo su diferencia entre el tiempo necesario para que dicho cambio tenga lugar. No es necesario considerar el signo negativo en problemas numéricos puesto que solo interesa la magnitud de E.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 8-1 Una bobina de 10 espiras es perpendicular a un campo magnético de tal manera que el flujo que pasa por la bobina es de 200 microwebers. La bobina se aleja rápidamente para que el flujo sea cero en 1/10 de segundo. ¿Cuál es la fuerza electromotriz media inducida?

Solución. Sabemos que $E_i = -\frac{N\Delta\phi}{t} = -10 \text{ espiras} \cdot \frac{200\ \mu\text{wb}}{0{,}1 \text{ seg}} = -10 \text{ espiras} \cdot \frac{200 \cdot 10^{-6} \text{ wb}}{0{,}1 \text{ seg}} =$

$$= -0{,}2 \text{ wb/seg} = -0{,}02 \text{ V}$$

Problema 8-2 Una bobina de 60 espiras y área $2 \cdot 10^{-2}$ metros cuadrados se coloca en ángulo recto a un campo magnético cuya densidad de flujo es $8 \cdot 10^{-3}$ webers/metro cuadrado. El valor del campo se reduce a 1/10 de su valor original en 0,3 segundos. ¿Cuál es la fuerza electromotriz media inducida?

Solución. Podemos emplear la fórmula $E_i = -\frac{N\Delta\phi}{t}$, pero primero debemos calcular $\Delta\phi$, que es el cambio de flujo que pasa por la bobina. Como flujo $= BA$ y $B = 8 \cdot 10^{-3}$ wb/m² y $A = 2 \cdot 10^{-2}$ m², entonces:

$$\text{flujo original} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ wb/m}^2\ (0{,}02 \text{ m}^2) = 1{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ wb}$$
$$\text{flujo final} = 1/10(0{,}16 \cdot 10^{-4} \text{ wb})$$

Por tanto, $\Delta\phi = 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ wb $- 0{,}16 \cdot 10^{-4}$ wb $= 1{,}4 \cdot 10^{-4}$ wb. Entonces:

$$E_i = -\frac{N\Delta\phi}{t} = -50 \text{ vueltas} \cdot \frac{1{,}4 \cdot 10^{-4} \text{ wb}}{0{,}3 \text{ seg}} = -2{,}4 \cdot 10^{-2} \text{ wb} \cdot \text{vuelta/seg} = -2{,}4 \cdot 10^{-2} \text{ V}$$

Nota. Observe que: weber/segundo $= \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{seg}} = \frac{\text{J}}{\text{A} \cdot \text{seg}} = \frac{\text{W}}{\text{A}} = \frac{\text{V} \cdot \text{A}}{\text{A}}$ = voltios, porque vatios = = voltios · amperios y julios/segundo = vatios.

además entre 2 solenoides cuando uno de los 2 es el inductor y el otro el inducido ⇒ $\boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1 A_1}{N_2 A_2}}$ ecuación general de un Transformador de Voltaje

la cual sirbe siempre que la corriente del inductor (primario) sea variable en función del tiempo solo así se obtendrá una $\Delta\Phi_m$

$\mathcal{P} = I_1 V_1 = I_2 V_2 = V_2^2/R$

$\Phi_{1-i} \neq \Phi_{i-1}$

$\Phi_{R_i} = \Phi_i + \Phi_{1-i}$

entre 2 solenoides: $\boxed{M_{1-2} = \frac{\mu_1 N_1}{l_1} N_2 A_2}$ de 1 en (o sobre) 2

ya que $\frac{\mu_2 A_2}{l_2} = \frac{\mu_1 A_1}{l_2}$ ⇒ $M_{1-2} = M_{2-1} = M$

Φ_{1-a}: Φ_1 en (o sobre) a

fem de a, inducida (por una $\Delta\Phi_{1-a}$) o voltaje de a debido a la mutua inducción

$N_a K_{1-a} = \boxed{M_{1-a} = N_a \frac{\Phi_{1-a}}{I_1}}$ mutua inductancia

MUTUA INDUCTANCIA (M) Es la medida que nos indica la eficiencia de transmisión de la energía de un inductor a otro.

$\boxed{\mathcal{E}_{M_a} = -N_a \frac{d\Phi_{1-a}}{dt} = -M_{1-a}\frac{dI_1}{dt}}$

Problema 8-3 Dos rieles, separados 1 metro, están colocados en dirección norte-sur. Por un extremo los rieles están conectados a un galvanómetro. La componente vertical del campo magnético terrestre es de 0,55 Oe. Una barra de cobre colocada perpendicularmente sobre los rieles se corre hacia el norte a una velocidad de 150 centímetros por segundo. ¿Cuánto vale la fuerza electromotriz inducida al moverse la barra y qué extremo de la barra se encuentra a mayor potencial?

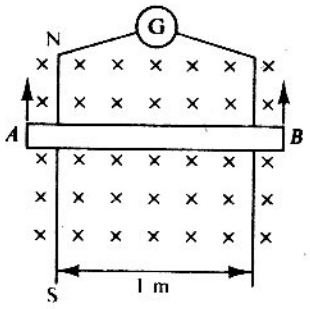


Figura 8-1

Asociación de 2 inductores

En serie:

$$L_{eq} = \frac{\sum_1^2 V_R}{\frac{dI}{dt}} = L_1 + L_2 \pm 2M$$

En paralelo:

$$L_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{L_i}}$$

Solución. Al moverse la barra corta las líneas de fuerza de la componente vertical del campo terrestre que apunta hacia abajo. Entonces se genera una f.e.m. entre los puntos A y B y se establecerá una corriente en el circuito, que se percibe en el galvanómetro. La dirección de la corriente se establece por la regla de la mano derecha: apuntando el índice hacia abajo y el pulgar hacia el norte, el dedo medio indica que la corriente pasa de B a A, es decir, A se encuentra a mayor potencial que B. La f.e.m. inducida está dada por la ecuación $E_i = -BLv$, donde B es equivalente a $H = 0{,}55$ Oe, $L = 100$ cm y $v = 150$ cm/seg. Si no se tiene en cuenta el signo: $E_i = (0{,}55)(100)(150) = 8250$ abV $= 0{,}0000825$ V.

Problema 8-4 Una bobina de 500 espiras y área de $3 \cdot 10^{-2}$ metros cuadrados gira alrededor de un eje perpendicular a un campo magnético de $2 \cdot 10^{-2}$ webers/metro cuadrado. Si la velocidad de rotación es de 25 revoluciones por segundo, ¿cuál es la fuerza electromotriz media inducida en la bobina?

Solución. Empleando la fórmula $E_i = -\frac{N\Delta\phi}{t}$ y si se supone que el tiempo es 1 segundo, se puede hallar el valor de $\Delta\phi$ para este periodo de tiempo. Al girar la bobina 360°, cada espira de alambre corta el campo magnético 4 veces, variando de un número máximo de líneas de flujo que pasan por la bobina (cuando está a 90° con respecto al campo) a un mínimo (cuando la bobina es paralela al campo); por tanto, $\Delta\phi$ es igual al máximo de líneas de fuerza cortadas. La densidad de flujo del campo es de $2 \cdot 10^{-2}$ wb/m^2 y el área de la bobina 0,03 m^2; por tanto, cuando la bobina es normal al campo, $2 \cdot 10^{-2}$ wb/m$^2 \cdot (0{,}03$ m$^2) = 6 \cdot 10^{-4}$ wb pasan por la bobina. Sin embargo, estas líneas del campo magnético se cortan cuatro veces por la bobina, en cada revolución; por consiguiente, el número total de líneas magnéticas que corta es:

$$6 \cdot 10^{-4} \text{ wb} \cdot (4/\text{rev}) = 24 \cdot 10^{-4} \text{ wb/rev}$$

Como en 1 seg realiza 25 revoluciones, el número total de líneas que corta es:

$$24 \cdot 10^{-4} \text{ wb/rev} \cdot 25 \text{ rev} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ wb}$$

Entonces, colocando el valor de $\Delta\phi$ en la ecuación dada al comienzo, se obtiene:

$$E_i = -50 \text{ espiras} \cdot \frac{6 \cdot 10^{-2} \text{ wb}}{1 \text{ seg}} = -3 \text{ wb/seg} = -3 \text{ V}$$

Problema 8-5 Una bobina cuadrada de 50 centímetros cuadrados y 20 espiras se hace girar a través de un eje transversal a la velocidad de 2 revoluciones por segundo, cuando dicha

bobina está sumergida en un campo magnético uniforme cuya densidad de flujo es de 500 gauss. La bobina tiene una resistencia de 20 ohmios. Calcule: la fuerza electromotriz media inducida en la bobina durante un cuarto de revolución y la carga que pasa por dicha bobina en ese intervalo, y el valor de la intensidad media de la corriente durante un ciclo completo.

Solución. En un cuarto de revolución el flujo eslabonado con la bobina se cambia completamente una vez. $\phi = NAB$, representa el número de líneas cortadas en 1/8 seg, puesto que 1/8 seg es un cuarto del periodo de rotación, N el número de espiras que interceptan el flujo cambiante en cualquier instante:

$$E_i = -\frac{N\Delta\phi}{t} = \frac{-2050 \text{ cm}^2 \ 500 \text{ gauss}}{1/8 \text{ seg}} = 4 \times 10^6 \text{ abV}$$

Según la ley de Ohm: $I = E/R = 0{,}04/20 = 0{,}002$ A; puesto que $Q = It = 0{,}002(1/8) = 0{,}00025$ culombios.

Problema 8-6 Una bobina circular y plana de 100 espiras y radio 20 centímetros tiene una resistencia de 0,5 ohmios. La bobina se coloca en su plano perpendicular al campo magnético de la tierra en un punto donde la densidad de flujo es de 30 microwebers/metro cuadrado. Si la bobina se hace girar 90° en 1/10 segundo, ¿qué carga circula por la bobina?

Solución. Cuando la bobina gira 90° corta todas las líneas una vez. Así debemos hallar el valor de $\Delta\phi$ para emplearlo en la fórmula $E_i = -\frac{N\Delta\phi}{t}$

Area de la bobina $= \pi r^2 = 3{,}14(0{,}2 \text{ m})^2 = 0{,}126 \text{ m}^2$; por tanto,

$$\Delta\phi = 30 \cdot 10^{-6} \text{ wb/m}^2 \ (0{,}126 \text{ m}^2) = 3{,}8 \cdot 10^{-6} \text{ wb}$$

Entonces:

$$E_i = -\frac{N\Delta\phi}{t} = -100 \text{ vueltas} \cdot 3{,}8 \cdot 10^{-6} \text{ wb}/0{,}1 \text{ seg} = -3{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ wb/seg} = -3{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

Ahora, empleando la ley de Ohm:

$$E = IR \quad \text{e} \quad I = E/R = 3{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ V}/0{,}5 \ \Omega = 7{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

Porque A = C/seg,

$$\text{C} = \text{A} \cdot \text{seg} = 7{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ A} \cdot 0{,}1 \text{ seg} = 7{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ C}$$

Problema 8-7 Una bobina gira a 1200 revoluciones por minuto. Las dimensiones de la bobina son 10 centímetros por 18 centímetros, tiene 600 espiras y corta las líneas de fuerza cuando gira en un campo de $200 \cdot 10^{-4}$ webers/metro cuadrado: *a*) ¿Cuál es el valor del voltaje inducido cuando la bobina forma un ángulo de 60° con el campo? *b*) Halle el valor medio del voltaje inducido en 1/2 revolución partiendo de una posición perpendicular al campo.

Solución. *a*) 1200 r.p.m. $\frac{1}{60}$ min/seg = 20 r.p.s., $f = 1200$ r.p.m.

La velocidad angular es: $\omega = 2\pi f = 2\pi 20 = (40\ \pi \text{ rad/seg})$.

En el sistema M.K.S. el voltaje instantáneo inducido es:

$$E_{inst} = NBA\omega \operatorname{sen} \theta = 600 \cdot 200 \cdot 10^{-4} \cdot 180 \cdot 10^{-4} \cdot 40\pi \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = 13{,}565 \text{ V}$$

b) Si la bobina gira a 20 r.p.s. emplea 1/20 seg para efectuar una revolución y 1/40 seg para dar 1/2 revolución.

El voltaje medio inducido en la bobina es:

$$E_{med} = N\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

Si $\Delta\phi = BA = 200 \cdot 10^{-4} \cdot 180 \cdot 10^{-4} = 3{,}6 \cdot 10^{-4}$ wb, entonces:

$$E_{med} = 600 \cdot \frac{3{,}6 \cdot 10^{-4}}{1/40} = 8{,}64 \text{ V}$$

Problema 8-8 Una barra de metal de 1 metro cae libremente en posición horizontal con sus extremos indicando el este y el oeste magnéticos. Halle la diferencia de potencial que existe entre sus extremos cuando ha caído 20 metros. La componente horizontal de la inducción magnética de la tierra es $1.7 \cdot 10^{-5}$ webers/metro cuadrado.

Solución. Como la dirección del movimiento es vertical, la componente vertical de la inducción magnética de la tierra no produce ningún efecto. Se produce una f.e.m. debida al movimiento relativo de la componente horizontal de la inducción magnética de la tierra. La ecuación del movimiento de la barra es $v^2 = v_0^2 + 2gs$, con $v_0 = 0$.

Cuando $s = 20$ m, $v^2 = 2 \cdot 9{,}8$ m/seg$^2 \cdot 20$

$$\therefore\ v = 19{,}7 \text{ m/seg}$$

La magnitud de la f.e.m. inducida es:

$$E_i = vBl = 19{,}7 \frac{\text{m}}{\text{seg}}\ 1{,}7 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{wb}}{\text{m}^2} \cdot 1 \text{ m} = 33{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ V}$$

Problema 8-9 Una bobina de N espiras rodea un solenoide. La corriente del solenoide varía sinusoidalmente con el tiempo según la relación $i = i_0$ sen $2\pi ft$, siendo f la frecuencia. Suponga que el solenoide tiene n espiras por metro. Halle la diferencia de potencial inducida entre los extremos de la bobina.

Solución. La diferencia de potencial inducida es igual a la f.e.m. inducida. Se supone que el solenoide es lo suficientemente largo para que $B = \mu_0 ni$ (dentro). B en la parte exterior del solenoide es pequeña. Si el radio del solenoide es a, el flujo que pasa por dicha área es $\pi a^2 B$ y es igual al flujo total que pasa a través de la bobina. Entonces:

$$\phi = \pi a^2 \mu_0 ni$$

La f.e.m. inducida en la bobina es:

$$E_i = -\pi \mu_0 N n a^2\ \frac{di}{dt}$$

y remplazando el valor que se da para i se tiene:

$$E_i = -2\pi^2 \mu_0 f N n a^2 i_0 \cos 2\pi ft$$

Densidad de energía magnét. almacenada, de cualquier cuerpo:

$$\rho_U = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{dU}{dV}$$

Energía meg. alm. de cualq. cuerpo

$$U = \int_a^b \rho_U\, dV = \frac{1}{2\mu}\int B^2 dV \quad (1)$$

$$\text{o} \quad U = \frac{1}{2} L I^2 \quad (2)$$

Problema 8-10 Halle la inducción propia de un toroide de N espiras.

Solución. B dentro del toroide está dada por:

$$B = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r}$$

Como B no es constante en la sección transversal, se debe integrar para obtener el flujo.

El flujo a través del área rayada (Fig. 8-2) es:

$$d\phi = B(bdr) \quad \text{o} \quad d\phi = \frac{\mu_0 Nib}{2\pi} \cdot \frac{dr}{r}$$

Para hallar el flujo total se debe integrar en el intervalo $a \le r \le (a + b)$. Esto da:

$$\phi = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 Nib}{2\pi} \cdot \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 Nib}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)$$

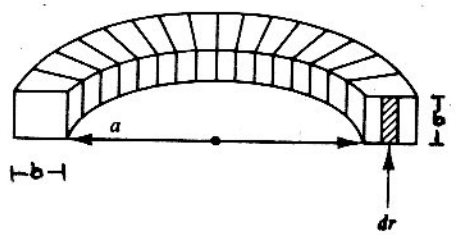


Figura 8-2

NOTA

La inductancia de cualquier cuerpo se halla con cualquiera de las 2 siguientes fórmulas

$$(1)\ L = N\frac{\Phi_m}{I}$$

$$(2)\ L = \frac{\int_a^b B^2 dV}{\mu I^2}$$

donde dV es el diferencial de volumen del cuerpo

Remplazando este valor en $\mathcal{E}_i = -N\,\frac{d\phi}{dt}$ se obtiene

$$\mathcal{E}_i = \frac{\mu_0 N^2 b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)\frac{di}{dt} \quad \therefore \boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)}$$

como $L = \frac{\mathcal{E}}{\frac{di}{dt}}$

Si $b/a < 1$, este resultado se reduce al de un solenoide de las mismas dimensiones.

Problema 8-11 Se tienen dos bobinas de 50 y 200 espiras, respectivamente. Por la primera pasa una corriente que llega a su máximo de 5 amperios en 0,2 segundos. Si la bobina de 200 espiras produce un flujo de $30 \cdot 10^{-3}$ webers, halle: *a*) la inducción mutua en la bobina 2; *b*) el voltaje inducido en la bobina 2.

Solución. *a*) La inducción mutua en la bobina 2 está dada por:

$$L_m = N_2\phi_2/i = 200 \cdot 30 \cdot 10^{-3}/5 = 1{,}2 \text{ henrios}$$

b) El voltaje inducido en la bobina 2 es:

$$E_2 = L_m \frac{\Delta i}{\Delta t} = 1{,}2 \cdot \frac{5}{0.2} = 30 \text{ V}$$

Problema 8-12 Una corriente de 20 amperios fluye por un alambre recto situado en las cercanías de un cuadro rectangular. Si la corriente se suspende llega a cero en 0,02 segundos. Halle la fuerza electromotriz inducida en el cuadro y la dirección de la corriente inducida.

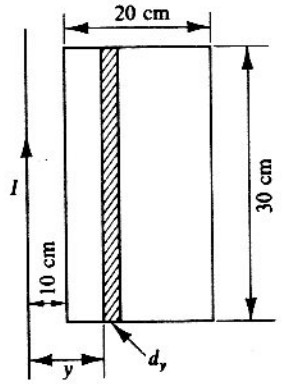


Figura 8-3

Solución. La inducción magnética en la parte rayada de la Figura 8-3 está dada por:

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{y}$$

y, por tanto, el flujo que pasa por el área rayada es:

$$d\phi = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{y}\, b\, dy$$

Integrando la expresión anterior encontramos el flujo total que pasa por el cuadro de alambre, que es:

$$\phi = \int d\phi = \frac{\mu_0}{2\pi} Ib \int_{0,1\,\text{m}}^{0,3\,\text{m}} \frac{dy}{y} = \frac{\mu_0}{2\pi} Ib \ln 3$$

La f.e.m. inducida en el cuadro es: $E = -\frac{d\phi}{dt}$ y su magnitud es:

$$E = \frac{\phi}{t} = \frac{\mu_0}{2\pi} Ib \ln 3 \cdot \frac{1}{t} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}(N/A^2) \cdot 10A \cdot (0{,}3\text{ m}) \ln 3}{2\pi(0{,}02\text{ seg})} = 3 \cdot 10^{-5} \cdot \ln 3\text{ V}$$

El flujo a través del cuadro disminuye. La corriente inducida debe producir efectos que se opongan al cambio que la produce, y debe fluir en una dirección tal que produzca un flujo en el cuadro en la misma dirección que el producido por la corriente en el alambre.

Problema 8-13 Un transformador aumenta el voltaje de 150 a 3000 voltios suponiendo que no hay pérdidas. *a*) Si el primario tiene 200 espiras, ¿cuántas debe tener el secundario? *b*) Si la resistencia en el primario es de 0,5 ohmios, ¿cuál es la corriente y la resistencia en el secundario?

Solución. Sea $E_p = 150$ V, $E_s = 300$ V, $N_p = 200$ espiras, $R_p = 0{,}5\ \Omega$.

a) El número de espiras en el secundario está dado por: $N_p/E_p = N_s/E_s$, de donde:

$$N_s = \frac{200 \cdot 3000}{150} = 4000 \text{ espiras}$$

b) La corriente en el secundario es: $i_p = E_p/r_p = 150/0{,}5 = 300$ A e $i_s = E_p/E_s \cdot i_p = (150/3000)300 = 15$ A. Entonces:

$$r_s = \frac{E_s}{i_s} = \frac{3000}{15} = 200\ \Omega$$

Problema 8-14 Un transformador reduce el voltaje de la corriente de 2200 voltios a 110. La potencia de salida es de 10 kilovatios y la eficiencia del transformador del 90 %. La bobina primaria está formada por 2000 espiras. ¿Cuántas espiras tiene la bobina del secundario? ¿Cuál es la potencia de entrada? ¿Qué corriente pasa por cada bobina?

Solución. Empleando la fórmula $E_1/E_2 = N_1/N_2$ se tiene: 2200 V/110 V = 2000 espiras/N_2.

$$\therefore N_2 = 2000 \text{ espiras} \cdot \frac{110\text{ V}}{2200\text{ V}} = 100 \text{ espiras}$$

Para hallar la potencia que entra sabemos que la eficiencia = (potencia producida/potencia consumida) · 100 = = 90 % = (10 kW/potencia consumida) · 100; entonces:

$$\text{potencia consumida} = \frac{10\text{ kW} \cdot 100}{90} = 11{,}1\text{ kW}$$

Como potencia = $E_1 I_1$, o sea, 2200 V · I_1 = 11,1 kW = 11 100 W, por tanto,

$$I_1 = 11\,100\text{ W}/2200\text{ V} = 5\text{ A, que es la corriente del primario}$$

Además, potencia = $E_2 \cdot I_2$; por tanto, 110 V · I_2 = 10 kW = 10 000 W e I_2 = 10 000 W/110 V = 91 A, que es la corriente en la bobina secundaria.

Problema 8-15 Un interruptor se emplea para abrir y cerrar un circuito que tiene una bobina conectada a una batería. El voltaje de la batería es de 120 voltios y la resistencia de la bobina de 5 ohmios. Si la corriente estacionaria es de 20 amperios y hay una caída del amperaje hasta el valor cero en 0,04 segundos: *a*) ¿cuál es la inductancia propia?; *b*) ¿cuál es el valor del cambio de flujo en una bobina de 400 espiras?

Solución. *a*) El voltaje inducido es:

$$E = V - ir = 120 - 20 \cdot 5 = 20 \text{ V}$$

La autoinducción es;

$$L_a = E_a \frac{\Delta t}{\Delta i} = 20 \cdot \frac{0{,}04}{20} = 0{,}04 \text{ H}$$

b) El cambio de flujo está dado por:

$$\Delta\phi = L_a \frac{\Delta i}{N} = 0{,}04 \cdot \frac{20}{400} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ wb}$$

Problema 8-16 Halle la expresión que da la intensidad de la corriente en el circuito *LR* de la Figura 8-4.

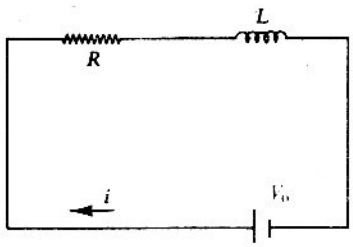


Figura 8-4

Solución. En el circuito se induce una f.e.m. dada por:

$$E_i = -L \frac{di}{dt}$$

Si i aumenta, la f.e.m. inducida trata de detener el aumento de i y, en consecuencia, aumenta el flujo a través de ella. Concluimos que la bobina de inductancia actúa como una batería, con f.e.m. igual a $L \frac{di}{dt}$ que se opone a V_0. Con esta consideración de polaridad, la ecuación del circuito es:

$$E_0 - iR - L \frac{di}{dt} = 0$$

que la podemos poner así:

$$E_0 = iR + L \frac{di}{dt} \qquad \frac{E_0}{R} = i + \frac{L}{R} \frac{di}{dt}$$

Separando las variables, queda:

$$\frac{di}{\frac{E_0}{R} - i} = \frac{R}{L} dt \quad \therefore \int \frac{di}{\frac{E_0}{R} - i} = \int \frac{R}{L} dt$$

Como $i = 0$ en el instante $t = 0$:

$$\int_0^i \frac{di}{\frac{E_0}{R} - i} = \frac{R}{L} \int_0^t dt \qquad \text{quedando:} \qquad -\ln \frac{(E_0/R) - i}{E_0/R} = \frac{Rt}{L}$$

Tomando antilogaritmos:

$$\frac{E_0}{R} - i = \frac{E_0}{R} e^{-Rt/L} \qquad \text{luego:} \qquad i = \frac{E_0}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

Problema 8-17 En un circuito resistencia-condensador halle en cualquier instante la carga durante el crecimiento y la carga en cualquier instante durante la disminución.

Solución. En un circuito resistencia-condensador, el voltaje producido por una batería está equilibrado por la oposición que se produce a la f.e.m. desarrollada por la caída de voltaje a través de la resistencia y de la f.e.m. Así,

$$\mathcal{E} = \frac{q}{C} + R\frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Integrando se obtiene:

$$q_C = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}),\ q_C = \text{carga en cualquier instante durante el crecimiento}$$

La ecuación de descarga del condensador es: $q_d = CE \cdot e^{-t/RC}$
La constante de tiempo se halla haciendo $t/RC = 1$; $\therefore\ t = RC$.

Problema 8-18 Una resistencia de 20 000 ohmios se conecta a un condensador de 40 microfaradios. Ambos se conectan a una fuente de 60 voltios. Halle: *a*) la corriente estacionaria; *b*) la constante del tiempo; *c*) la carga en el condensador a los 0,2 segundos; *d*) la caída de voltaje en el condensador a los 0,2 segundos; *e*) la carga en el condensador a los 0,6 segundos después de abierto el interruptor; *f*) el voltaje en el condensador a los 0,6 segundos después de haber empezado la disminución.

Solución. *a*) La corriente estacionaria es:

$$i = V/r = 60/(2 \cdot 10^4) = 30 \cdot 10^{-4}\ \text{A}$$

b) La constante de tiempo es: $t = rC = 2 \cdot 10^4 \cdot 40 \cdot 10^{-6} = 0{,}8$ seg.

c) La carga después de haber transcurrido 0,2 seg, es:

$$Q_C = CE(1 - e^{-t/rC}) = 40 \cdot 10^{-6} \cdot 60\left[1 - e^{-\left(\frac{0{,}2}{2 \cdot 10^4 \cdot 40 \cdot 10^{-6}}\right)}\right] = 2{,}4 \cdot 10^{-3}(1 - e^{-0{,}25});\ Q_C = 528\ \mu\text{C}$$

d) La caída de voltaje después de haber transcurrido 0,2 seg:

$$Q = CV\ \therefore\ V = Q/C = (528 \cdot 10^{-6})/(40 \cdot 10^{-6}) = 13{,}2\ \text{V}$$

e) La carga a los 0,6 seg de haber abierto el interruptor es:

$$Q_d = CEe^{-t/rC} = 40 \cdot 10^{-6} \cdot 60\left(e^{-\frac{0{,}6}{2 \cdot 10^4 \cdot 40 \cdot 10^{-6}}}\right) = 2{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{2{,}11} = 1{,}14 \cdot 10^{-3}\ \text{C}$$

f) El voltaje a los 0,6 seg es:

$$V = Q/C = (1{,}14 \cdot 10^{-3})/(40 \cdot 10^{-6}) = 28{,}5\ \text{V}$$

Problema 8-19 Un solenoide con núcleo de hierro de 1 metro de largo y $8{,}10^{-4}$ metros cuadrados de área seccional tiene 1200 espiras de alambre. Si la permeabilidad del hierro es 1000 veces la del aire, ¿cuál es la inductancia del solenoide?

Solución. Empleando la fórmula $L = \mu AN^2/l$, con μ 1000 veces la del aire, o $1000 \cdot 1{,}251 \cdot 10^{-6}$ H/m = $= 1{,}257 \cdot 10^{-3}$ H/m, entonces:

$$L = \frac{1{,}257 \cdot 10^{-3}\ \text{H/m} \cdot 8 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2\ (1200\ \text{espiras})^2}{1\ \text{m}} = 1{,}4\ \text{H}$$

Problema 8-20 Una bobina tiene una resistencia de 20 ohmios y una inductancia de 0,5 henrios y se conecta a una línea de corriente continua de 100 voltios. ¿Cuál es el aumento de la corriente en la bobina: *a*) cuando se cierra el interruptor; *b*) en el instante en que la corriente alcanza la mitad de su valor máximo; *c*) en el instante en que la corriente alcanza el 90% de su valor máximo?

Solución. El voltaje de la línea debe ser igual a la caída de IR a través de la bobina más la f.e.m. inductiva de la bobina ($E = -L\Delta I/t$); por tanto,

$$E_{\text{línea}} = IR + L\Delta I/t$$

a) En el instante en que el interruptor está cerrado, $I = 0$; por tanto, $IR = 0$ y

$$E_{\text{línea}} = 100 \text{ V} = L\Delta I/t = 0{,}5 \text{ H}(\Delta I/t) \quad \therefore \Delta I/t = \frac{100 \text{ V}}{0{,}5 \text{ H}} = \frac{100 \text{ V}}{0{,}5 \text{ V} \cdot \text{seg/A}} = 200 \text{ A/seg}$$

El valor máximo de la corriente (cuando la $\Delta I/t$ es prácticamente cero) $= E/R$; por tanto,

$$I_{\text{max}} = 100 \text{ V}/20\,\Omega = 5 \text{ A}$$

b) Cuando la corriente llega a la mitad de su valor máximo, $I = (1/2)5 \text{ A} = 2{,}5 \text{ A}$, y empleando la fórmula:

$$E_{\text{línea}} = IR + L\Delta I/t \text{ o } 100 \text{ V} = 2{,}5 \text{ A} \cdot 20\,\Omega + 0{,}5 \text{ H} \cdot \Delta I/t$$

$$\therefore 50 \text{ V} = 0{,}5 \text{ H} \cdot (\Delta I/t) \quad \therefore \Delta I/t = \frac{50 \text{ V}}{0{,}5 \text{ H}} = \frac{50 \text{ V}}{0{,}5 \text{ V} \cdot \text{seg/A}} = 100 \text{ A/seg}$$

c) Cuando la corriente alcanza el 90 % de su valor máximo, $I = 90\,\% \cdot 5 \text{ A} = 4{,}5 \text{ A}$; por tanto,

$$100 \text{ V} = 4{,}5 \text{ A} \cdot 20\,\Omega + 0{,}5 \text{ H} \cdot (\Delta I/t) \quad \therefore \Delta I/t = \frac{10 \text{ V}}{0{,}5 \text{ H}} = \frac{10 \text{ V}}{0{,}5 \text{ V} \cdot \text{seg/A}} = 20 \text{ A/seg}$$

Problema 8-21 Dos bobinas tienen inductancia mutua de 0,75 henrios. Si la corriente en la bobina primaria cambia de 100 amperios a 20 en 0,06 segundos, ¿cuál es la fuerza electromotriz promedio inducida en la bobina secundaria? Si la bobina secundaria tiene 1200 espiras, ¿cuál es el cambio de flujo en ella?

Solución. Para hallar el voltaje en la bobina secundaria, $E_{\text{sec}} = -M\dfrac{\Delta I_p}{t}$; por tanto,

$$E_{\text{sec}} = -0{,}75 \text{ H} \cdot \frac{80 \text{ A}}{0{,}06 \text{ seg}} = -0{,}75 \frac{\text{V} \cdot \text{seg}}{\text{A}} \cdot \frac{80 \text{ A}}{0{,}06 \text{ seg}} = -1000 \text{ V}$$

puesto que el cambio en la corriente es de 80 A. Para hallar el cambio de flujo, $E = -\dfrac{N\Delta\phi}{t}$; por tanto,

$$-1000 \text{ V} = -1200 \text{ espiras} \cdot \Delta\phi/0{,}6 \text{ seg} \quad \text{y} \quad \Delta\phi = \frac{1000 \text{ V} \cdot (0{,}06 \text{ seg})}{1200 \text{ espiras}} = 5 \cdot 10^{-2} \frac{\text{V} \cdot \text{seg}}{\text{espira}} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ wb}$$

La unidad voltios-segundos es equivalente a webers porque espiras no tiene unidades.

Problema 8-22 Dos bobinas tienen inductancia mutua de 0,4 henrios. La bobina primaria tiene una inductancia propia de 1,5 henrios y transporta una corriente de 5 amperios. ¿Cuál es la energía de inductancia propia? ¿Cuál es la energía de inductancia mutua?

Solución. La energía de autoinducción está dada por: $W_a = (1/2)L_a I^2$; por tanto,

$$\text{energía} = (1/2)(1{,}5\ \text{H}) \cdot (5\ \text{A})^2 = 18{,}75\ \text{H} \cdot \text{A}^2 = 18{,}75\ \text{J}$$

La energía de inductancia mutua está dada por: $W_m = (1/2)L_m I_p^2$; por tanto,

$$\text{energía} = (1/2)(0{,}4\ \text{H})(5\ \text{A})^2 = 5\ \text{H} \cdot \text{A}^2 = 5\ \text{J}$$

Problema 8-23 Una autoinducción de resistencia R y coeficiente de autoinducción L se conecta en serie con una resistencia no inductiva de resistencia R_0 a una diferencia de potencial constante V_{AB}. *a*) Halle V_{CB} en un instante cualquiera después de cerrar el interruptor S_1. *b*) Sea $V_{AB} = 20$ voltios, $R_0 = 5$ ohmios, $R = 200$ ohmios, $L = 10$ henrios.

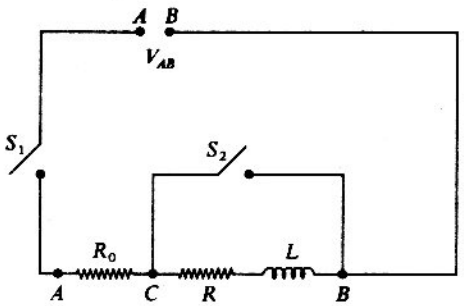


Figura 8-5

Solución. *a*) Como la f.e.m. de autoinducción es: $E = -L\dfrac{di}{dt}$, entonces la diferencia de potencial es:

$$V_{CB} = iR + L\frac{di}{dt} \quad \text{y} \quad V_{AC} = iR_0$$

entonces:

$$V_{AB} = V_{AC} + V_{CB} = i(R_0 + R) + L\frac{di}{dt}$$

de donde:

$$\frac{di}{dt} = \frac{V_{AB}}{L} - \frac{R_0 + R}{L}\,i \tag{1}$$

Si se hace $a = \dfrac{V_{AB}}{L}$ y $b = \dfrac{R_0 + R}{L}$, se tiene que:

$$\frac{di}{a - bi} = dt; \text{ integrando: } -\frac{1}{b}\ln(a - bi) = t + c$$

Para $t = 0$, $i = 0$, entonces:

$$-\frac{1}{b}\ln a = c \quad \therefore \ln\left(\frac{a - bi}{a}\right) = -bt \quad \therefore \frac{a - bi}{a} = e^{-bt}$$

De donde resulta que la intensidad de la corriente es:

$$i = (a/b)(1 - e^{-bt}) = \frac{V_{AB}}{R_0 + R}\left(1 - e^{-\frac{R_0+R}{L}\cdot t}\right)$$

Ahora como

$$V_{CB} = iR + L\frac{di}{dt} \quad \text{con} \quad i = \frac{V_{AB}}{R_0 + R}\left(1 - e^{-\frac{R_0+R}{L}\cdot t}\right)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{V_{AB}}{L}\cdot e^{-\frac{R_0+R}{L}\cdot t} \tag{1}$$

Al remplazar el valor de di/dt dado por (1) en la expresión de V_{CB} se tiene:

$$V_{CB} = \frac{V_{AB}}{R_0 + R}\left(R + R_0 \cdot e^{-\frac{R_0+R}{L}\cdot t}\right)$$

b) Si $V_{AB} = 20$ V, $R_0 = 5\ \Omega$, $R = 200\ \Omega$ y $L = 10$ H, según las condiciones del problema, el intervalo de tiempo será:

$$t = 2\left(\frac{L}{R_0 + R}\right) = \frac{20}{205} = \frac{4}{51} = 0{,}07 \text{ seg}$$

Problema 8-24 Un condensador de capacidad C se carga conectándolo a través de una resistencia R a los bornes de una batería de fuerza electromotriz E y resistencia interna despreciable. *a*) ¿Cuánta energía suministra la batería durante el proceso de carga? *b*) ¿Qué fracción de esta energía aparece en forma de calor en la resistencia?

Solución. *a*) La energía suministrada por la batería en el proceso de carga del condensador es $dw = Edq$, o sea, que:

$$W = E\int_0^Q dq = EQ, \text{ puesto que } q \text{ aumenta de 0 a } Q$$

b) La fracción de la energía EQ que aparece en forma de calor en la resistencia está dada por la relación: $dw_R = \frac{1}{C}qdq$, o sea, que:

$$W_R = i^2Rt = \frac{1}{C}\int_0^Q qdq = \frac{1}{2}Q^2C = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q}{C}\cdot Q = \frac{1}{2}EQ$$

Problema 8-25 Un condensador de 10 microfaradios está conectado a una diferencia de potencial constante de 100 voltios a través de una resistencia de 10^6 ohmios. *a*) Calcule la carga del condensador en los instantes, después de efectuar las conexiones: 5 segundos, 10 segundos, 20 segundos, etc. *b*) Calcule la intensidad de la corriente de carga en los mismos instantes. *c*) ¿Cuánto tiempo sería necesario para que el condensador adquiriese su carga final, si la intensidad de la corriente de carga permanece constante en su valor inicial? Compárese con la constante de tiempo del circuito. *d*) Calcule el tiempo necesario para que la carga aumente de cero a $5 \cdot 10^{-4}$ culombios.

Solución. *a*) Si $t = 0$, la carga del condensador es $Q = 0$.

Si $t = 5$ seg, según la relación $q = CV_{AB}(1 - e^{-t/RC})$ se tiene que:

$$q = 10^{-5}\cdot 10^2(1 - e^{-0{,}5}) = 10^{-3}(1 - 0{,}606) \approx 400\cdot 10^{-6}\text{ C}$$
$$= 394\cdot 10^{-6}\text{ C}$$

porque $RC = 10$ y $t/RC = 0{,}5$.

Si $t = 10$ seg, la carga correspondiente es:

$$q = CV_{AB}(1 - e^{-t/RC}) = 10^{-3}(1 - e^{-1}) = 10^{-3}(1 - 0{,}3678) = 630\cdot 10^{-6}\text{ C}$$

Si $t = 20$ seg, la carga es:

$$q = CV_{AB}(1 - e^{-t/RC}) = 10^{-3}(1 - e^{-2}) = 10^{-3}(1 - 0{,}136) = 870\cdot 10^{-6}\text{ C}$$

b) La intensidad de la corriente $i = \frac{dq}{dt}$ se va a calcular a partir de la relación:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{V_{AB}}{R} - \frac{q}{RC}$$

Para $t = 0$ la intensidad $i = \frac{V_{AB}}{R} = \frac{100}{10^6} = 10^{-4}$ A, porque $q = 0$.

Para $t = 5$ seg, $q = 400\ \mu$C e $i = \frac{V_{AB}}{R} - \frac{q}{RC} = 10^{-4}\text{ A} - \frac{400 \cdot 10^{-6}\text{ C}}{10^6\ \Omega \cdot 10^{-5}\text{ F}} = 60\ \mu$A.

Para $t = 10$ seg, la carga $q = 630\ \mu$C e $i = 10^{-4}\text{ A} - \frac{630 \cdot 10^{-6}\text{ C}}{10\text{ C/A}} = 37\ \mu$A.

Para $t = 20$ seg, la carga $q = 870\ \mu$C e $i = 10^{-4}\text{ A} - \frac{870 \cdot 10^{-6}\text{ C}}{10\text{ C/A}} = 13\ \mu$A.

c) La carga final del condensador es:

$$Q = CV_{AB} = 10^{-7} \cdot 100 = 10^{-3}\text{ C}$$

y si la intensidad es:

$$i = I = \frac{V_{AB}}{R} = \frac{100}{10^6} = 10^{-4}\text{ A}$$

entonces el tiempo necesario para que el condensador adquiera su carga Q es:

$$T = Q/I = \frac{10^{-3}}{10^{-4}} = 10\text{ seg}$$

que es igual a la constante de tiempo del circuito: $t = RC = 10^6 \cdot 10^{-5} = 10$ seg.

d) El tiempo necesario para que la carga aumente desde cero hasta $5 \cdot 10^{-4}$ está dada por la relación:

$$q = CV_{AB}(1 - e^{-t/RC})$$

Entonces:

$$5 \cdot 10^{-4} = 10^{-3}(1 - e^{-t/10}) \quad \therefore\ e^{-t/10} = 0{,}5 \quad \therefore\ \ln(0{,}5) = -\frac{t}{10} = -0{,}7$$

$$\therefore\ t = 7\text{ seg}$$

Problema 8-26 Si la resistencia del circuito de la Figura 8-6 en cualquier instante es R, halle la fuerza que se necesita para empujar al alambre con una velocidad v. ¿Qué se hace de la potencia suministrada?

Solución. La f.e.m. inducida es vBb. Entonces la corriente en el circuito está dada por:

$$E = IR, \text{ o sea, } I = \frac{vBb}{R} \tag{1}$$

El alambre AC transporta esta corriente hacia arriba. Cualquier alambre que transporta una corriente en un campo magnético experimenta una fuerza ILB, para este caso; por tanto, $F = vB^2b^2/R$, y, según las reglas generales, es hacia la izquierda. Entonces es necesario ejercer una fuerza igual hacia la derecha. El agente que tira gasta una potencia de magnitud:

$$\text{potencia} = Fv = v^2B^2b^2/R$$

Esta potencia aparece en el circuito como calor. El calor producido por segundo es I^2R. Remplazando este valor en (1) se tiene que: potencia transformada en calor $= v^2B^2b^2/R$, que coincide con la potencia de entrada.

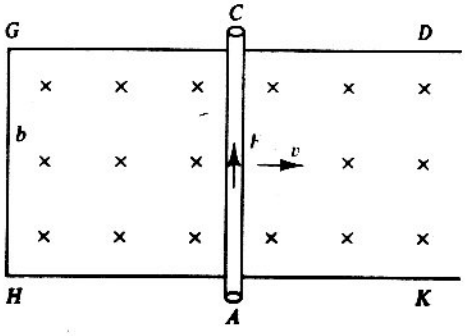


Figura 8-6

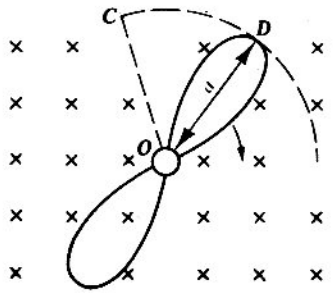


Figura 8-7

Problema 8-27 Una hoja de hélice de un ventilador de longitud $2a$ gira con una frecuencia de f revoluciones por segundo perpendicular a un campo magnético B. Halle la diferencia de potencial entre el centro y el extremo de la hoja. (Fig. 8-7.)

Solución. La velocidad v de un punto sobre la hoja a una distancia r del centro es:

$$v = r\omega = 2\pi rf$$

Como existe un campo en este punto de la hoja, el campo eléctrico $E = vB = 2\pi rfB$. Para hallar la diferencia de potencial entre los puntos O y D se emplea la definición de diferencia de potencial, es decir,

$$V_D - V_0 = -\int_0^D E_r dr = -\int_0^a 2\pi fBr dr = -\pi fBa^2$$

Problema 8-28 La longitud del núcleo de hierro de un toroide es $l_2 = 1$ metro y la del entrehierro $l_1 = 3$ milímetros. El número de espiras del arrollamiento del toroide es $N = 2000$. Halle la excitación magnética H_1 en el entrehierro si la intensidad de la corriente en el arrollamiento del toroide es $I = 1$ amperio.

Solución. La inducción magnética en el núcleo es la misma que en el entrehierro, es decir,

$$B_2 = B_1 = \phi/S = \frac{IN\mu_0}{\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{l_2}{\mu_2}} \tag{1}$$

Como $B_2 = \mu_0\mu_2 H_2$, de (1) se deduce que:

$$B_1 \frac{l_1}{\mu_1} + \mu_0 H_2 l_2 = IN\mu_0 \tag{2}$$

La ecuación (2) es la ecuación de una recta, siendo los ejes coordenados H y B. Pero las magnitudes de H y B están relacionadas, además, también por $B = f(H)$. La ordenada del punto de intersección de la recta (2) con la curva correspondiente, dependencia $B = f(H)$, nos da el valor de la inducción magnética $B_2 = B_1$. Según (2), para $H = 0$ se tiene:

$$B = \frac{IN\mu_0\mu_1}{l_1} = 0{,}84\ T; \quad \text{para} \quad B = 0,\ H = \frac{IN}{l_2} = 2000\ \text{A/m}$$

El punto de intersección buscado nos da $B_2 = B_1 = 0{,}78\ T$. Entonces para el entrehierro se tiene que:

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0\mu_1} = 6{,}2 \cdot 10^5\ \text{A/m}$$

Problema 8-29 Se necesita construir un electroimán que produzca una inducción magnética de 1400 gauss en el espacio interpolar. La longitud del núcleo de hierro es de 40 centímetros, la longitud del espacio interpolar es de 1 centímetro, el diámetro del núcleo es de 5 centímetros. Halle: *a*) ¿qué fuerza electromotriz se necesita suministrar al arrollamiento del electroimán, para obtener el campo magnético deseado, si a nuestra disposición tenemos un conductor de cobre cuya sección transversal tiene un área de 1 milímetro cuadrado; *b*) ¿cuál será en este caso el espesor mínimo del arrollamiento si se considera que la densidad límite tolerable de corriente es de 3 amperios/milímetro cuadrado?

Solución. *a*) Tenemos que $B = \frac{IN\mu_0}{l_1/\mu_1 + l_2/\mu_2}$, de aquí que el número necesario de amperios-espira sea:

$$IN = \frac{B}{\mu_0}\left(\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{l_2}{\mu_2}\right) = \frac{Bl_1}{\mu_0\mu_1} + Hl_2$$

De la curva $B = f(H)$ se halla que el valor $B = 14\,000$ gauss $= 1{,}4\ T$ corresponde el valor $H = 800$ A/m. Por consiguiente, $IN = 1{,}14 \cdot 10^4$ A-espiras. Luego $I = E/R = ES/\rho\pi DN$, de donde:

$$E = \frac{IN\rho\pi D}{S} = 31 \text{ V}$$

b) Como el diámetro del conductor es $d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = 1{,}13 \cdot 10^{-3}$ m, en toda la longitud del solenoide caben $N = \frac{40 \cdot 10^{-2}}{1{,}13 \cdot 10^{-3}} = 354$ espiras. Como $I = jS = 3$ A, $N = 3830$ espiras, se desprende que el número necesario de capas será igual a $3830/354 \approx 11$, y como el diámetro del conductor es igual a $1{,}13 \cdot 10^{-3}$ m, resulta que 11 capas formarán un espesor de $1{,}2 \cdot 10^{-2}$ m $= 1{,}2$ cm.

Problema 8-30 A la distancia de 20 centímetros de un conductor largo y rectilíneo vertical pende de un hilo fino de 10 centímetros de longitud y 0,1 milímetros de diámetro una pequeña aguja magnética cuyo momento magnético es igual a 10^{-2} A · m^2. La aguja se halla en el plano que pasa por el conductor y por el hilo. ¿Qué ángulo girará la aguja si por el conductor se hace fluir una corriente de 30 amperios de intensidad? El módulo de rigidez del material del hilo es de 600 kgf/mm^2. El sistema está apantallado contra el campo magnético de la tierra.

Solución. El momento de rotación que actúa sobre la aguja magnética es: $M = pB$ sen α, donde p es el momento magnético de la aguja y $B = \mu_0\mu H = \frac{I\mu_0\mu}{2\pi a}$ es la inducción magnética del campo de la corriente. Este momento de rotación M origina un giro del hilo en un ángulo $\varphi = \frac{2lM}{\pi Gr^4}$, donde l es la longitud del hilo; r el radio del hilo, y G el módulo de rigidez del material del hilo.

Como sen $\alpha = 1$, tenemos que $M = pB = p\frac{I\mu_0\mu}{2\pi a}$. De donde $\varphi = \frac{\mu_0\mu Ilp}{a\pi^2 Gr^4}$. En nuestro caso, $I = 30$ A. $l = 0{,}1$ m, $p = 10^{-2}$ A · m^2, $a = 0{,}2$ m, $G = 600$ kgf/mm^2 $= 5{,}9 \cdot 10^9$ N/m^2 y $r = 0{,}05$ mm $= 5 \cdot 10^{-5}$ m. Remplazando estos valores tenemos que $\varphi = 0{,}52$ rad o $\varphi = 30°$.

Problema 8-31 En un campo magnético de 500 gauss de inducción gira una varilla de 1 metro de longitud a una velocidad angular constante de 20 rad/seg. El eje de giro pasa por el extremo de la varilla y es paralelo a las líneas de fuerza del campo magnético. Halle la fuerza electromotriz de inducción que se crea en los extremos de la varilla.

Solución. El flujo magnético atravesado por la varilla a cada vuelta de ésta es: $\phi = BS = B\pi l^2$, donde l es la longitud de la varilla. Si la varilla realiza v r.p.m. tendremos que $E = B\pi l^2 v = B\pi l^2 \frac{\omega}{2\pi} = Bl^2\frac{\omega}{2}$, donde ω es la velocidad angular de giro. Remplazando los valores numéricos del problema, hallamos que $E = 0{,}5$ V.

Problema 8-32 Dos bobinas están arrolladas sobre un núcleo común. La inductancia de la primera bobina es de 0,2 henrios y la de la segunda de 0,8 henrios; la resistencia de la segunda bobina es de 600 ohmios. ¿Qué corriente fluirá por la segunda bobina si se desconecta durante 0,001 segundos la corriente que fluye por la primera bobina, que es de 0,3 amperios?

Solución. Tenemos que:

$$L_1 = \mu_0\mu n_1^2 lS \quad \text{y} \quad L_2 = \mu_0\mu n_2^2 lS \tag{1}$$

La autoinducción de las bobinas con núcleo común será:

$$L_{12} = \mu_0\mu n_1 n_2 lS \tag{2}$$

De (1) se obtiene: $L_1L_2 = (\mu_0\mu lS)^2 n_1^2 n_2^2$, de donde:

$$n_1 n_2 = \frac{\sqrt{L_1L_2}}{\mu_0\mu lS} \tag{3}$$

Remplazando los valores de (3) en (2) se obtiene que $L_{12} = \sqrt{L_1L_2}$.

Como $E_2 = -L_{12}\frac{dI_1}{dt}$, el valor medio de la intensidad de la corriente en la segunda bobina será:

$I_2 = \frac{L_{12}}{R}\cdot\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{R}\cdot\frac{\Delta I}{\Delta t}$. Al remplazar los valores numéricos del problema se obtiene: $I_2 = 0{,}2$ A.

Problema 8-33 En un campo magnético de inducción igual a 0,1 T se introduce un contorno cuadrado formado por un conductor de cobre. El área de la sección transversal del conductor es igual a 1 milímetro cuadrado, el área del cuadrado es de 25 centímetros cuadrados, la normal al plano del cuadro va dirigida según las líneas de fuerza del campo. ¿Qué cantidad de electricidad pasará por el contorno del cuadrado al desaparecer el campo magnético?

Solución. La cantidad de electricidad inducida en el campo será:

$$q = -\frac{1}{R}\int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi = -\frac{1}{R}(\phi_2 - \phi_1)$$

donde ϕ_1 es el flujo de inducción magnética a través del cuadro en su primera posición y ϕ_2 el flujo de inducción magnética a través del cuadro en la segunda posición. En nuestro caso, $\phi_2 = 0$, además tenemos que:

$$R = \frac{\rho l}{S_2} = \frac{\rho 4a}{S_2} = \frac{\rho 4\sqrt{S_c}}{S_2}$$

a es el lado del cuadrado; S_c el área del cuadro, y S_2 la sección transversal del conductor. Como $\phi_1 = BS_c$ entonces:

$$q = \frac{BS_2\sqrt{S_c}}{4\rho} = 0{,}074 \text{ C}$$

Problema 8-34 Un electrón acelerado por una diferencia de potencial $U = 6$ kilovoltios se introduce en un campo magnético uniforme formando un ángulo $\alpha = 30°$ con la dirección del campo y empieza a moverse según la espiral. La inducción magnética del campo es $B = 1{,}3 \cdot 10^{-2}$ webers/metro cuadrado. Halle: *a*) el radio de la espira, y *b*) el paso de la misma.

Solución. *a*) La velocidad del electrón que se introduce en el campo magnético es $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$. Descompongamos en dos la velocidad v; siendo v_t la componente que va dirigida según las líneas de fuerza del campo y v_n la que va dirigida perpendicularmente a las líneas de fuerza. La proyección del trayecto del electrón sobre el plano perpendicular a B será una circunferencia de radio igual al de la espira de la espiral, que es el radio buscado y que se determina por la fórmula:

$$R = \frac{mv_n}{eB} = \frac{mv \operatorname{sen}\alpha}{eB} \tag{1}$$

donde α es el ángulo formado por la dirección de la velocidad v del electrón y la dirección del campo. Como el periodo de traslación del electrón es:

$$T = \frac{2\pi R}{v \operatorname{sen}\alpha} = \frac{2\pi m}{eB}$$

tendremos que el paso de la trayectoria espiral es:

$$l = v_t T = \frac{2\pi m v \cos\alpha}{eB} \tag{2}$$

Remplazando los valores numéricos en (1) y (2) se obtiene: $R = 10^{-2}$ m $= 1$ cm.

b) $l = 11 \cdot 10^{-2}$ m $= 11$ cm.

Problema 8-35 Un haz de electrones, acelerado por una diferencia de potencial de $U = 300$ voltios, se introduce en un campo magnético uniforme dirigido desde el plano del dibujo hacia el lector. La anchura del campo es $l = 2{,}5$ centímetros. Si no hay campo magnético, el haz de electrones produce una mancha en el punto F de la pantalla fluorescente AA situada a la distancia $l_1 = 5$ centímetros del borde de los polos del imán. Cuando se conecta el campo magnético, la mancha se desplaza al punto B. Halle el desplazamiento $x = FB$ del haz de electrones si se sabe que la inducción del campo magnético es igual a $1{,}46 \cdot 10^{-5}$ webers/metro cuadrado.

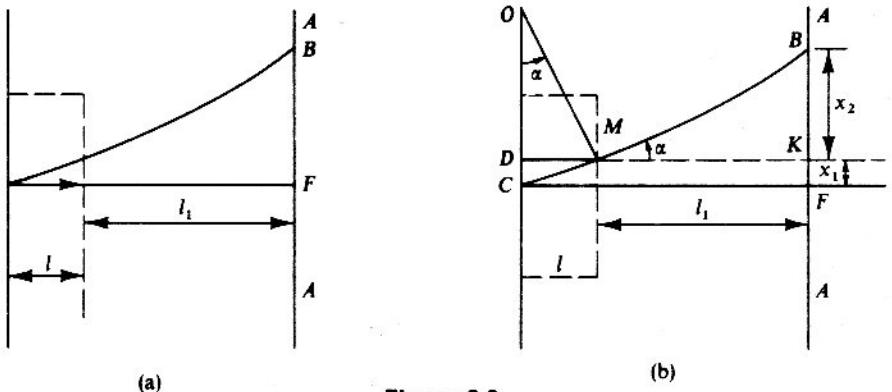


Figura 8-8

Solución. El desplazamiento total del electrón es $x = x_1 + x_2$, donde x_1 es el desplazamiento del electrón en el campo magnético [Fig. 8-8(b)]. El electrón se desplaza por el campo magnético según una circunferencia de radio $R = \dfrac{mv}{eB}$.

La magnitud del desplazamiento x_1 se puede hallar de la relación $x_1 = DC = OC - OD$. Pero $OC = R$ y $OD = \sqrt{OM^2 - DM^2} = \sqrt{R^2 - l^2}$. Así tenemos que $x_1 = R - \sqrt{R^2 - l^2}$.

El desplazamiento x_2 se puede determinar de la proporción $x_2/l_1 = DM/DO$, de donde:

$$x_2 = l_1 \frac{l}{\sqrt{R^2 - l^2}}$$

Entonces el desplazamiento total será:

$$x = R - \sqrt{R^2 - l^2} + l_1 \frac{l}{\sqrt{R^2 - l^2}}$$

Como $R = \dfrac{mv}{eB} = \dfrac{1}{B}\sqrt{\dfrac{2Um}{e}}$, donde U es la diferencia de potencial aplicada, y colocando los valores numéricos hallamos que $R = 4 \cdot 10^{-2}$ m $= 4$ cm, $x = 4{,}9 \cdot 10^{-2}$ m $= 4{,}9$ cm.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcule la potencia consumida por una corriente alterna de 120 voltios de tensión eficaz y 2 amperios de intensidad eficaz. Halle también los valores máximos de estas magnitudes.
   El factor de fase es 0,8.
2. Halle la impedancia, la diferencia de fase entre la intensidad y la tensión y el valor de la frecuencia de resonancia de un circuito en el que están intercalados en serie una resistencia de 80 ohmios, una autoinducción de 0,5 henrios y una capacidad de 0,2 microfaradios, para corrientes de 50 hertzios de frecuencia.
3. Calcule el número de espiras del secundario de un transformador cuyo primario tiene 300 espiras, si se pretende que la tensión del secundario produzca 100 kilovatios en una corriente de 220 voltios.
4. Una bobina de 5 henrios y 3 ohmios está intercalada en una línea de 220 voltios y 50 hertzios. Calcule la potencia que disipa y la intensidad que la recorre.

CIRCUITO EN SERIE LC

CAPITULO 9

Corrientes alternas

Las corrientes cuya intensidad es función del tiempo reciben el nombre de *corrientes variables.* Cuando la intensidad repite un mismo valor para intervalos iguales de tiempo se dice que la corriente es *periódica.*

Corriente alterna es una corriente periódica cuya intensidad cambia de sentido en cada periodo.

Aquí vamos a estudiar la más sencilla y usual de las corrientes alternas, aquella cuya intensidad es *función sinusoidal* del tiempo:

$$I = I_m \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \quad \text{donde } -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} = 1{,}5708 \text{ Rad}$$

o

$$I = I_m \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - \phi\right) = I_m \operatorname{sen}(2\pi f t - \phi) \quad (9\text{-}1)$$

$U(t) = U_R(t) + U_C(t) + U_L(t)$

$U_C(t) = \frac{1}{2} C V_C^2$

$U_R(t) = \frac{1}{2} R t I^2$

$U_L(t) = \frac{1}{2} L I^2$

siendo I la intensidad de un instante t, I_m la intensidad máxima y ω la velocidad angular del inducido del alternador.

La fuerza electromotriz es asimismo función sinusoidal de t:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \operatorname{sen}(\omega t) \quad (9\text{-}2)$$

siendo $\mathcal{E}_m$ la fuerza electromotriz máxima: $\mathcal{E}_m = N \cdot B \cdot A \cdot \omega$.

Cuando la intensidad de corriente en un circuito de corriente alterna está adelantada o atrasada respecto a la fuerza electromotriz se dice que existe entre ambas una *diferencia de fase.* ϕ

En los circuitos de corriente alterna se presentan las tres formas siguientes de resistencia:

1. Resistencia óhmica (R). R
2. Reactancia inductiva ($L\omega$) debida a los fenómenos de inducción en bobinas y solenoides. $X_L = L\omega$
3. Reactancia capacitiva $\frac{1}{C\omega}$ debida a los condensadores. $X_C = \frac{1}{C\omega}$

CIRCUITO EN SERIE R-C-L

La diferencia de potenciales instantáneas de L, C y R no son las mismas (no están en fase)

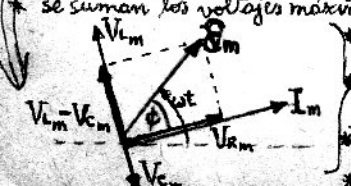
La resistencia total del circuito recibe el nombre de impedancia (Z) y su valor se obtiene sumando vectorialmente las resistencias parciales. [Se tiene en cuenta que la intensidad en una corriente alterna sinusoidal va desfasada 90° respecto a la fuerza electromotriz.]

Si $X_L > X_C \Rightarrow \phi$ es +

En los circuitos en serie RCL:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (9\text{-}3)$$

* se suman los voltajes máximos vectorialmente.



* V_{R_m} está en fase con I_m
* V_C está siempre atrasado 90° con I
* V_L está siempre adelantado 90° con I
* la corriente I_m para el C, L, R será la misma

denominándose a $X = |X_L - X_C|$ como la reactancia del circuito, si $X_L > X_C$ $\Rightarrow$ el circuito es inductivo, si $X_L < X_C$ $\Rightarrow$ el circuito es capacitivo

Un voltaje máximo (V_m) cualquiera es llamado fasor

Ley de Ohm. La ley de Ohm generalizada para las corrientes alternas queda expresada por en el circuito en serie RCL

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{Z} \Rightarrow \mathcal{E}_m = \sqrt{V_{R_m}^2 + (V_{L_m} - V_{C_m})^2} \qquad (9\text{-}4)$$

o bien:

$$\Rightarrow \begin{cases} V_R = I_m R \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \\ V_C = I_m X_C \operatorname{sen}(\omega t - \phi - \pi/2) \\ V_L = I_o X_L \operatorname{sen}(\omega t - \phi + \pi/2) \end{cases} \qquad I_m = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \qquad (9\text{-}5)$$

$$\tan\phi = \frac{V_{L_m} - V_{C_m}}{V_{R_m}} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

medios cuadráticos o

Valores eficaces. La cantidad de calor que produce una corriente es proporcional al cuadrado de su intensidad y, por tanto, independiente del signo que esta última tenga. Esto permite definir como *valor eficaz* de una corriente alterna al correspondiente de una corriente continua que en el mismo tiempo y con la misma resistencia produce igual cantidad de calor que la corriente alterna en cuestión.

Partiendo de la energía gastada Q en forma de calor en un tiempo t:

En particular $t = T$, un período, entonces:

$$Q = \int_0^T I_m^2 R\,dt = \int_0^T I_m^2 \operatorname{sen}^2 \omega t\, R\,dt =$$

$$I_m^2 R \int_0^T \operatorname{sen}^2 \omega t\, dt = \tfrac{1}{2} I_m^2 RT,$$

en este tiempo una corriente constante de intensidad I_e desarrolla, en forma de calor una energía, Q, de valor:

$Q = I_e^2 RT$, pero como por definición son iguales, entonces:

$$I_e^2 RT = \tfrac{1}{2} I_m^2 RT \therefore \boxed{I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}}$$

Ahora $I_m = \dfrac{\mathcal{E}_m}{z}$, dividiendo por $\sqrt{2}$ a ambos lados se tiene: $I_e = \dfrac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{2}\,z} = \dfrac{\mathcal{E}_e}{z}$

de aquí:

$$\boxed{\mathcal{E}_e = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{2}}}$$

Para cualquier circuito siempre

$$\overline{\mathcal{P}}_L = 0$$

$$\overline{\mathcal{P}}_C = 0$$

Potencia instantánea

$$\mathcal{P} = VI \qquad (9\text{-}6)$$

Potencia media del circuito

$$\overline{\mathcal{P}}_R = \tfrac{1}{2} V_m I_m \cos\phi = V_e I_e \cos\phi$$

$(\cos\phi)$ ≡ factor de potencia

Potencia media del circuito en serie RCL, si es que no existe en él un motor.

$$\overline{\mathcal{P}}_R = \tfrac{1}{2} I_m^2 R = I_e^2 R$$

$$U_R = \overline{\mathcal{P}}_R\, t$$

Resonancia. en los circuitos RCL serie Un circuito entra en resonancia para una cierta frecuencia cuando la intensidad que circula por él es máxima, es decir, cuando $V_{L_m} = V_{C_m}$

(cuando I_m e V_m están en fase) $\Rightarrow \boxed{X_L = X_C}$

$$L\omega = \frac{1}{C\omega}$$

o bien:

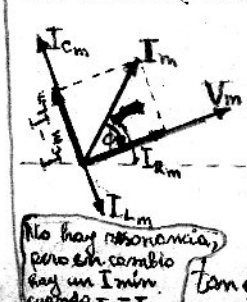
$$\boxed{L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0} \quad \boxed{\frac{2\pi L}{T} = \frac{T}{2\pi C}}$$

de donde:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}; \quad \boxed{f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

CIRCUITO EN PARALELO RCL

* Se suman los intensidades de corriente máximas, vectorialmente
* Las diferencias de potencial instantáneas son las mismas (están en fase) para R, C y L



$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}}$$

(9-8)

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{Z} = \sqrt{I_{R_m}^2 + (I_{C_m} - I_{L_m})^2}$$

No hay resonancia, pero en cambio hay un $I_{mín}$ cuando $I_C = I_L$

$$\tan\phi = \frac{I_{C_m} - I_{L_m}}{I_{R_m}} = \frac{\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}}{\frac{1}{R}}$$

Procedimiento para resolver problemas

Debe notarse, al considerar problemas de corriente alterna, que una capacitancia no constituye una interrupción en el circuito como en los circuitos de corriente continua; en el circuito de corriente continua la resistencia puede determinarse por el cociente E/I, mientras que esta relación en corriente alterna representa la impedancia, que es mayor que la resistencia sola, excepto que la reactancia capacitiva compense la reactancia inductiva.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 9-1 El voltaje de un circuito de corriente alterna varía sinusoidalmente con el tiempo con un valor máximo de 185 voltios. ¿Cuál es el voltaje instantáneo cuando ha alcanzado un ángulo de 35° en su ciclo?

Solución.

$$E_{inst} = 185 \text{ V} \cdot 0{,}5736 = 106 \text{ V}$$

Problema 9-2 ¿Cuál es el valor instantáneo de la corriente, 1/900 de segundo después de pasar por su valor cero, si la frecuencia es de 60 ciclos por segundo y la corriente máxima es de 40 amperios? ¿Cuál es el valor efectivo de la corriente?

Solución. El valor instantáneo de la corriente $I_{inst} = I_{max}$ sen ωt, siendo ω la velocidad angular en grados por segundo. Sin embargo, la frecuencia está dada en ciclos por segundo, y como cada ciclo es de 360°, 60 ciclos/seg = 21 600°/seg. Entonces:

$$I_{inst} = I_{max} \text{ sen } \omega t = 40 \text{ A} \cdot \text{sen } (21\,600/\text{seg} \cdot 1/900 \text{ seg}) = 40 \text{ sen } 24° = 40 \cdot (0{,}4067) = 16{,}3 \text{ A}$$

$$I_{cf} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, I_{max} = 0{,}707 \cdot 40 \text{ A} = 28{,}3 \text{ A}$$

Problema 9-3 Una bobina gira 60 veces por segundo en un campo magnético y produce una fuerza electromotriz de 170 voltios. ¿Cuál es el valor instantáneo del voltaje 1/1000 de segundo después de pasar por el valor cero? ¿Cuál es el valor efectivo del voltaje?

Solución. Empleando la fórmula: $E_{inst} = E_{max}$ sen $2\pi ft$, entonces:

$$E_{inst} = 170 \text{ V} \cdot \text{sen } 2\pi \cdot (60 \text{ ciclos/seg}) \cdot 1/1000 \text{ seg} = 170 \text{ V } (0{,}3681) = 62{,}7 \text{ V}$$

$$E_{cf} = 0{,}707 E_{max} = 0{,}707 \cdot 170 \text{ V} = 120 \text{ V}$$

Problema 9-4 *a*) Halle la reactancia de una autoinducción de 10 henrios para las frecuencias de 60 ciclos/segundo y 600 ciclos/segundo. *b*) Calcule la reactancia de un condensador de 10 microfaradios para las mismas frecuencias.

Solución. *a*) Si el coeficiente de autoinducción es $L = 10$ H, para $f = 60$ ciclos/seg la reactancia inductiva es:

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi \cdot 60 \cdot 10 = 3770\ \Omega$$

y para la frecuencia de 600 ciclos/seg la reactancia inductiva es:

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi \cdot 600 \cdot 10 = 37 \cdot 700\ \Omega$$

b) Si la capacidad de un condensador es $C = 10\ \mu F = 10^{-5}$ F, entonces para $f = 60$ ciclos/seg la reactancia capacitiva es:

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(60)(10^{-5})} = 265\ \Omega$$

y para $f = 600$ ciclos/seg la reactancia capacitiva es:

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(600)(10^{-5})} = 26{,}5\ \Omega$$

Problema 9-5 Un condensador tiene un voltaje de 220 voltios aplicados a una frecuencia de 60 ciclos. Si la capacitancia es de 6 microfaradios, halle: *a*) la reactancia capacitiva; *b*) la corriente en el circuito.

Solución. *a*) La reactancia capacitiva está dada por:

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi 60 \cdot 6 \cdot 10^{-6}} = 442\ \Omega$$

b) La corriente en el sistema es:

$$i = \frac{E}{X_C} = \frac{220}{442} = 0{,}498\ \text{A}$$

Problema 9-6 En un circuito de corriente alterna en el que predomina la capacitancia el ángulo de fase es de 20° y el valor eficaz de la corriente 25 amperios. ¿Cuál es el valor instantáneo de la corriente cuando el voltaje pasa por su valor cero?

Solución. Se puede emplear la fórmula:

$$I_{inst} = I_{max} \operatorname{sen}(\theta - \phi), \text{ con } \theta = 0° \text{ y } \phi = -20°$$

se usa el signo menos porque la corriente adelanta el voltaje, pero primero hay que hallar I_{max}. Como:

$$I_{ef} = 0{,}707\ I_{max} \quad \therefore\ I_{max} = \frac{I_{ef}}{0{,}707} = \frac{25\ \text{A}}{0{,}707} = 35{,}4\ \text{A}$$

Entonces, $I_{inst} = I_{max} \operatorname{sen}(\theta - \phi) = 35{,}4\ \text{A} \cdot \operatorname{sen}[0° - (-20°)] = 35{,}4\ \text{A} \cdot (0{,}342) = 12{,}1\ \text{A}$.

Problema 9-7 Una bobina tiene una inductancia de 0,05 henrios y una resistencia de 10 ohmios. El voltaje a 60 ciclos es 110 voltios corriente alterna. Halle: *a*) la reactancia inductiva; *b*) la impedancia; *c*) la corriente en la bobina; *d*) el voltaje a través de cada componente; *e*) el ángulo de fase; *f*) el diagrama vectorial.

Solución. *a*) La reactancia inductiva es:

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi \cdot 60\ (0{,}05) = 18{,}84\ \Omega$$

b) La impedancia es:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L} = \sqrt{10^2 + 18{,}84^2} = 21{,}3\ \Omega$$

c) La corriente en la bobina:

$$i = E/z = \frac{110}{21{,}3} = 5{,}16\ \text{A}$$

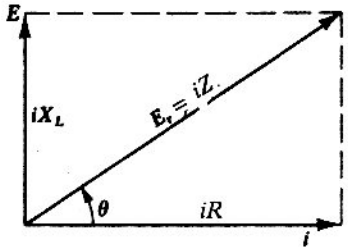


Figura 9-1

d) El voltaje a través de cada componente es:

$$E_L = X_L i = 18{,}84 \cdot (5{,}16) = 97{,}2 \text{ V} \qquad E_r = ir = 5{,}16 \cdot 10 = 51{,}6 \text{ V}$$

e) El ángulo de fase:

$$\cos\theta = R/Z = \frac{10}{21{,}3} = 0{,}469 \quad \therefore \theta = 62°, \; E \text{ sobrepasa a } i$$

f) El diagrama de fase está representado en la Figura 9-1.

Problema 9-8 Halle la reactancia de un inductor de 10 mH a una frecuencia de $200/\pi$ hertzios. Repita el cálculo para $2 \cdot 10^6/\pi$ hertzios.

Solución. La reactancia de un inductor es: $2\pi fL$. Tenemos que:

a $f = 200/\pi \cdot \text{seg}^{-1}$: $\qquad X_L = 2\pi \dfrac{200}{\pi}(10 \cdot 10^{-3}) = 4\,\Omega$

a $f = 2 \cdot 10^6/\pi \text{ seg}^{-1}$: $\qquad X_L = 40\,000\,\Omega$

Observe que la reactancia de un inductor aumenta linealmente con la frecuencia. Los inductores tienen alta reactancia a alta frecuencia.

Problema 9-9 Halle la reactancia de un condensador de 0,1 microfaradio a una frecuencia de $200/\pi$ hertzios y a $2 \cdot 10^6/\pi$ hertzios.

Solución. La reactancia de un condensador es: $1/2\pi fC$. Para este caso:

para $f = 200/\pi \cdot \text{seg}^{-1}$: $\qquad X_C = \dfrac{\pi}{2\pi(200)(0{,}1 \cdot 10^{-6})} = 25\,000\,\Omega$

para $f = 2 \cdot 10^6/\pi \text{ seg}^{-1}$: $\qquad X_C = 2{,}5\,\Omega$

Vemos que un condensador tiene una alta reactancia a bajas frecuencias y pasa la corriente más fácilmente a altas frecuencias.

Problema 9-10 Un condensador y una resistencia se conectan a una línea de 100 voltios y 50 ciclos corriente alterna. El condensador tiene una capacidad de 40 microfaradios y la resistencia 20 ohmios. Halle: *a*) la reactancia capacitiva; *b*) la impedancia; *c*) la corriente en el condensador; *d*) el ángulo de fase; *e*) construya un diagrama (Fig. 9-2).

Solución. *a*) La reactancia capacitiva está dada por:

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 40 \cdot 10^{-6}} = 80\ \Omega$$

b) La impedancia es:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_c^2} = \sqrt{20^2 + 80^2} = 82{,}5\ \Omega$$

c) La corriente es:

$$i = \frac{E}{Z} = \frac{100}{82{,}5} = 1{,}2\ \text{A}$$

d) El ángulo de fase es:

$$\cos\theta = \frac{R}{Z} = \frac{20}{82{,}5} = 0{,}242 \quad \therefore\ \theta = 76°$$

La corriente adelanta al voltaje.

e) El diagrama está representado en la Figura 9-2.

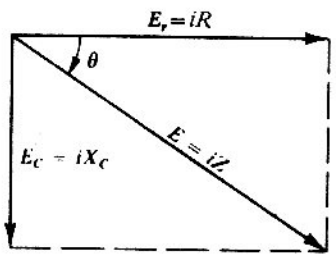


Figura 9-2

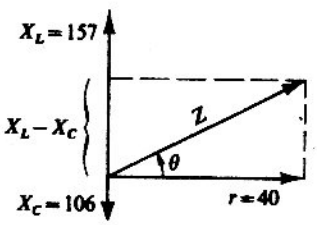


Figura 9-3

Problema 9-11 Una bobina tiene una resistencia de 40 ohmios y una inductancia de 0,5 henrios conectada en serie con un condensador de 30 microfaradios. El voltaje de la línea es de 110 voltios 50 ciclos. Halle: *a*) la reactancia inductiva; *b*) la reactancia capacitiva; *c*) la impedancia; *d*) la corriente; *e*) el ángulo de fase. (Fig. 9-3.)

Solución. *a*) La reactancia inductiva es:

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi \cdot 50(0{,}5) = 157\ \Omega$$

b) La reactancia capacitiva es:

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 30 \cdot 10^{-6}} = 106\ \Omega$$

c) La impedancia está dada por:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{40^2 + (157 - 106)^2} = 64{,}8\ \Omega$$

d) La corriente:

$$i = E/Z = 110/64{,}8 = 1{,}7\ \text{A}$$

e) El ángulo de fase:

$$\cos\theta = \frac{R}{Z} = \frac{40}{64{,}8} = 0{,}618 \quad \therefore\ \theta = 51{,}8°$$

Problema 9-12 Halle: *a*) la impedancia; *b*) la corriente; *c*) el ángulo de fase, correspondiente a la figura 9-4.

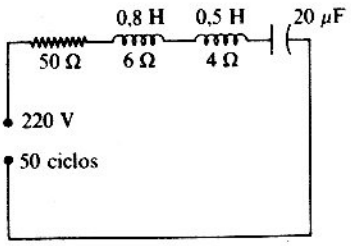


Figura 9-4

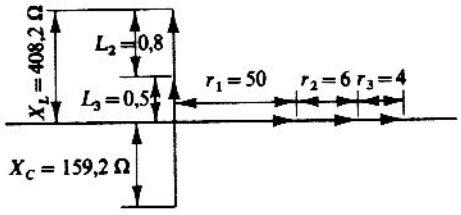


Figura 9-5

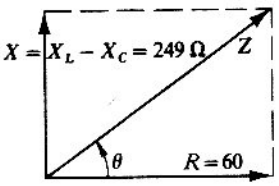


Figura 9-6

Solución. *a*) Para hallar la impedancia:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 = 50 + 6 + 4 = 60\ \Omega$$

Además,

$$L = L_2 + L_3 = 0{,}8 + 0{,}5 = 1{,}3\ \text{H}$$

La reactancia inductiva es:

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi \cdot 50(1{,}3) = 408{,}2\ \Omega$$

La reactancia capacitiva es:

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 159{,}2\ \Omega$$

La impedancia está dada por:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{60^2 + (408{,}2 - 159{,}2)^2} = 256\ \Omega$$

b) La corriente:

$$i = E/Z = \frac{220}{256} = 0{,}86\ \text{A}$$

c) El ángulo de fase está dado por:

$$\cos\theta = R/Z = \frac{60}{256} = 0{,}234 \quad \therefore\ \theta = 76{,}5°$$

La Figura 9-6 muestra el diagrama de fase.

Problema 9-13 Una bobina tiene una resistencia de 20 ohmios y una inductancia de 0,1 henrio y está conectada a una fuente de 120 voltios y 60 ciclos. Halle: *a*) la inductancia del circuito; *b*) la impedancia de la bobina; *c*) la corriente que pasa por la bobina; *d*) el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje de la línea; *e*) el factor de potencia; *f*) la potencia empleada.

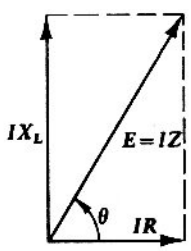


Figura 9-7

Solución. *a*) Sabemos que la inductancia $= X_L = 2\pi fL = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 60$ ciclos/seg $\cdot$ 0,1 H $= 37{,}7\ \Omega$.

b) Para hallar la impedancia Z sabemos que $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ y, como no hay capacitancia en el circuito, $X_C = 0$, y, por tanto,

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{20^2 + 37{,}7^2} = 42{,}7\ \Omega$$

c) Como $Z = E_{efec}/I_{efec}$,

$$I_{efec} = \frac{E_{efec}}{Z} = \frac{120\ \text{V}}{42{,}7\ \Omega} = 2{,}8\ \text{A}$$

d) Para hallar el ángulo de fase, se debe dibujar el diagrama de fase de los voltajes (Fig. 9-7).

$$\phi = \text{arc tg}\ \frac{IX_L}{IR} = \text{arc tg}\ \frac{37{,}7\ \Omega}{20\ \Omega} = \text{arc tg}\ 1{,}885 = 62{,}1°$$

por tanto, la corriente está retrasada (desfasada) en 62,1° con relación al voltaje. La dirección positiva indica que el voltaje está adelantado a la corriente.

e) Como el factor potencia $= \cos\phi$, será: $\cos 62{,}1° = 0{,}468$.

f) La potencia empleada $= E_{ef}I_{ef} \cdot$ (factor de potencia) $= E_{ef}I_{ef} \cdot \cos\phi = 120\ \text{V} \cdot 2{,}81\ \text{A} \cdot 0{,}468 =$ $= 158$ W.

Problema 9-14 Una bobina de resistencia 100 ohmios y una autoinducción de 0,1 henrio está en serie con una resistencia de 12 ohmios y un condensador de 0,5 microfaradios. El conjunto está conectado a una corriente alterna de 100 voltios y 60 ciclos. Calcule el voltaje entre los terminales de la bobina.

Solución. La reactancia capacitiva es:

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi \cdot 60 \cdot (0{,}5 \cdot 10^{-6})} \approx 5300\ \Omega$$

y la reactancia inductiva de la bobina es:

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi \cdot 60(0{,}1) = 37{,}68\ \Omega$$

La resistencia total será: $R_T = R_b + R = 112\ \Omega$ y, por consiguiente, la impedancia del circuito completo es:

$$Z = \sqrt{R_T^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(112)^2 + (5300 - 37{,}68)^2} = 5262\ \Omega$$

La intensidad de la corriente que circula por la línea está dada por:

$$I = V/Z = \frac{100\ \text{V}}{5262} = 0{,}018\ \text{A}$$

y el voltaje entre los terminales es: $V_b = IZ_b$, con Z_b la impedancia de la bobina, cuyo valor es:

$$Z_b = \sqrt{R_b^2 + X_L^2} = \sqrt{100^2 + (37{,}68)^2} = 107\ \Omega$$

En consecuencia, $V_b = IZ_b = (0{,}018)(107) = 1{,}926$ V.

Problema 9-15 Una batería de 5 voltios se conecta en serie con dos elementos eléctricos. La corriente en el circuito es de 100 miliamperios. Si se remplaza por una corriente alterna de 10 voltios y 50 ciclos, la corriente resultante es de 50 miliamperios. ¿Cuáles son los valores de los elementos del circuito?

Solución. Como la corriente puede pasar por los elementos, ninguno de ellos puede ser un condensador que presente una resistencia infinita a la corriente directa. La resistencia de los elementos es:

$$R = V/I = \frac{5\text{ V}}{100 \cdot 10^{-3}\text{ A}} = 50\,\Omega$$

Como la corriente cambia al remplazarla por corriente alterna, el circuito debe contener un inductor de inductancia L, con

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{V'}{I'} = \frac{10\text{ V}}{50 \cdot 10^{-3}\text{ A}} = 200\,\Omega$$

$$\therefore\ 2500^2\,\Omega^2 + \omega^2 L^2 = 40\,000\,\Omega^2 \quad \therefore\ L^2 = \frac{37\,500\,\Omega^2}{\omega^2} \quad \therefore\ L = \frac{193{,}6}{2\pi \cdot 50/\text{seg}} = 0{,}61\text{ H}$$

Problema 9-16 Los puntos A y B son los terminales de una línea de corriente alterna de 60 ciclos (Fig. 9-8). El voltaje eficaz entre A y B es 130 voltios. Si $R_1 = 10$ ohmios, $R_2 = 5 = R_3$ ohmios, $X_C = 4$ ohmios, $X_L = 9$ ohmios, calcule: *a*) la intensidad de la corriente en el circuito; *b*) el voltaje entre A y C; *c*) el voltaje entre C y D.

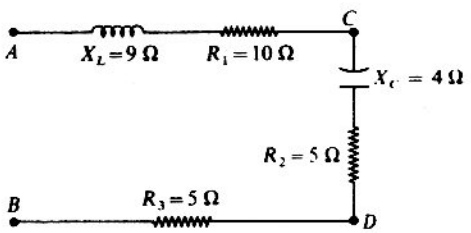


Figura 9-8

Solución. *a*) La resistencia total del circuito es: $R = R_1 + R_2 + R_3 = 20\,\Omega$; por tanto, la impedancia del circuito completo es:

$$Z_{AB} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{400 + (9 - 4)^2} = 20{,}6\,\Omega$$

y la intensidad de la corriente que pasa por el circuito es:

$$I = \frac{V_{AB}}{Z_{AB}} = \frac{130\text{ V}}{20{,}6} = 6{,}3\text{ A}$$

b) La impedancia es:

$$Z_{AC} = \sqrt{R_1^2 + X_L^2} = \sqrt{100 + 81} = \sqrt{181} = 13{,}45\,\Omega$$

y, por consiguiente, el voltaje es:

$$V_{AC} = IZ_{AC} = 6{,}3 \times 13{,}45 = 84{,}7$$

c) Análogamente, la impedancia es:

$$Z_{CD} = \sqrt{R_2^2 + X_C^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41} = 6{,}4\,\Omega$$

y el voltaje es:

$$V_{CD} = IZ_{CD} = 6{,}3\ (6{,}4) = 40{,}3\text{ V}$$

Problema 9-17 Una bobina de inductancia 0,25 henrios y resistencia 20 ohmios se conecta en serie con un condensador de 30 microfaradios y una resistencia de 30 ohmios, y el circuito total está conectado a una fuente de 110 voltios y 60 ciclos. Halle: *a*) la reactancia inductiva; *b*) la reactancia capacitiva; *c*) la impedancia total; *d*) la corriente que pasa por el circuito; *e*) el ángulo de fase; *f*) la potencia consumida. (Fig. 9-9.)

Solución. *a*) $X_L = 2\pi fL = 2 \cdot 3{,}14 \cdot (60 \text{ ciclos/seg}) \cdot 0{,}25 \text{ H} = 94\ \Omega$.

b) $X_C = \dfrac{1}{2\pi fC} = \dfrac{1}{2 \cdot (3{,}14)\,(60 \text{ ciclos/seg}) \cdot 30 \cdot 10^{-6} \text{ F}} = 88\ \Omega$.

c) $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$, y como la resistencia de 20 Ω de la bobina está en serie con la resistencia de 30 Ω, $R = 50\ \Omega$; por tanto,

$$Z = \sqrt{(50)^2 + (94 - 88)^2} = 50{,}4\ \Omega$$

d) $Z = E_{efec}/I_{efec} \quad \therefore\ I_{efec} = \dfrac{E_{efec}}{Z} = \dfrac{110 \text{ V}}{50{,}4\ \Omega} = 2{,}2 \text{ A}.$

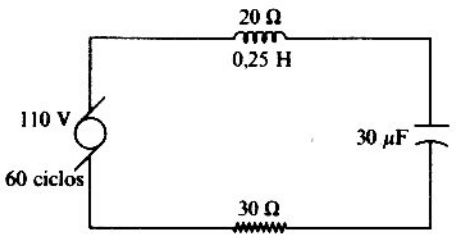


Figura 9-9

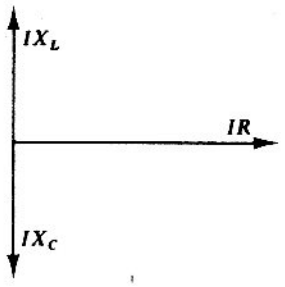


Figura 9-10

e) Para hallar el ángulo de fase se debe dibujar el diagrama de fase (Fig. 9-10). La caída en IR producida por las resistencias combinadas está en fase con la corriente y, por tanto, se debe dibujar en la dirección positiva del eje X. La caída de reactancia IX_L adelanta la corriente en 90° y se dibuja en la dirección positiva del eje Y. La caída capacitiva IX_C está retrasada a la corriente en 90° y se dibuja en la dirección negativa del eje Y.

Vemos que las caídas reactiva e inductiva están desfasadas en 180° entre sí y, por consiguiente, son vectores que actúan en direcciones opuestas y la resultante es la diferencia algebraica de las dos. Así,

$$IX_L = 2{,}2 \text{ A} \cdot 94\ \Omega = 207 \text{ V};\ IX_C = 2{,}2 \text{ A} \cdot 88\ \Omega = 194 \text{ V};\ IR = 2{,}2 \text{ A} \cdot 50\ \Omega = 110 \text{ V}$$

Además,

$$\phi = \text{arc tg } \frac{13 \text{ V}}{110 \text{ V}} = \text{arc tg } 0{,}118 = 6{,}8°$$

Como la reactancia inductiva es mayor que la reactancia capacitiva, el resultado neto es un circuito con una pequeña reactancia inductiva y la corriente está retrasada del voltaje en una pequeña cantidad de 6,8°

Si la reactancia capacitiva hubiese sido mayor que la reactancia inductiva, entonces el ángulo de fase habría sido negativo y la corriente se adelantaría al voltaje.

f) La potencia consumida $= E_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos\phi = 110 \text{ V} \cdot 2{,}2 \text{ A} \cdot \cos 6{,}8° = 110 \text{ V} \cdot 2{,}2 \text{ A} \cdot (0{,}993) =$ $= 240$ W.

Problema 9-18 El voltaje entre los bornes del generador de corriente alterna es de 150 voltios, y $R = 5$ ohmios, $X_L = 60$ ohmios, $X_C = 60$ ohmios. Calcule la intensidad de la corriente en el circuito y V_{AB}, V_{BC}, V_{CD}, V_{BD}, V_{AD}. (Fig. 9-11.)

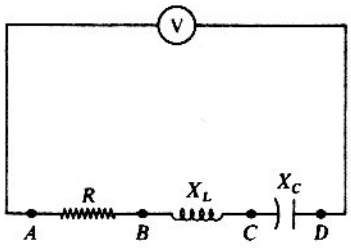


Figura 9-11

Solución. La impedancia del circuito completo es:

$$Z_{AD} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{25 + (60 - 60)^2} = 5\ \Omega$$

por tanto, la intensidad de la corriente en el circuito será:

$$I = V_{AD}/Z_{AD} = 150/5 = 30\ \text{A}$$

La diferencia de potencial:

$$V_{AB} = IZ_{AB} = IR = 30 \cdot 5 = 150\ \text{V}$$

asimismo, el voltaje:

$$V_{BC} = IZ_{BC} = IX_L = 30 \cdot 60 = 1800\ \text{V}$$

también la diferencia de potencial:

$$V_{CD} = IZ_{CD} = 30 \cdot 60 = 1800\ \text{V}$$

La diferencia de potencial: $V_{BD} = IZ_{BD} = I\sqrt{(X_L - X_C)^2} = 0$. Además, $V_{AD} = 150$ V, por ser el voltaje entre los bornes del generador de corriente alterna.

Problema 9-19 Un condensador de capacidad 10 microfaradios está conectado en serie a una bobina de un generador de corriente alterna de 2 voltios y frecuencia controlable. Al variar la frecuencia se observa que la intensidad de la corriente alcanza su máximo valor eficaz de 0,1 amperio cuando la frecuencia angular de $\omega = 2\pi f$ es 40 000 radianes/segundo. *a*) Calcule la resistencia y autoinducción de la bobina. *b*) ¿Cuál es la intensidad de la corriente cuando $\omega = 100\,000$ radianes/segundo?

Solución. *a*) La resistencia de la bobina es:

$$R = V/I = \frac{2\ \text{V}}{0{,}1} = 20\ \Omega$$

Para calcular el coeficiente de autoinducción L de la bobina hay que calcular:

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{(40\,000)\,10^{-5}} = 2{,}5\ \Omega$$

entonces la impedancia total del circuito es:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = V/I$$

$I = \frac{V}{Z} = \frac{2V}{20.6} =$ A

de donde resulta $X_L = 2{,}5\ \Omega$; por consiguiente, $X_L = 2\pi fL$, entonces:

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{2{,}5}{40\,000} = 6{,}25 \cdot 10^{-5}\ \Omega$$

Si $W = 2\pi f = 100.000$ rad/s.

$X_L = 2\pi f L$

$X_C = \frac{1}{2\pi f C}$

b) Si $\omega = 2\pi f = 100\,000$ rad/seg, entonces:

$$X_L = 2\pi fL = 100\,000\,(6{,}25 \cdot 10^{-5}) = 6{,}25\ \Omega$$

y la reactancia capacitiva es:

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{100\,000\,(10^{-5})} = 1\ \Omega$$

por tanto,

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{400 + 5{,}25^2} = 20{,}6\ \Omega$$

y la intensidad de la corriente será:

$$I = V/Z = \frac{2\text{ V}}{20{,}6} = 0{,}09\text{ A}$$

Problema 9-20 Un circuito absorbe 330 vatios de una línea de corriente alterna a 110 voltios y 60 ciclos. El factor de potencia es 0,6 y la corriente está retrasada respecto al voltaje. Calcule la capacidad del condensador en serie, que producirá un factor de potencia unidad.

Solución. De la relación $P = IV\cos\theta$ se obtiene que la intensidad de la corriente es:

$$I = P/V\cos\theta = \frac{330\text{ W}}{110(0{,}6)\text{ V}} = \frac{330\text{ W}}{66} = 5\text{ A}$$

Ahora para el factor de potencia $\cos\theta = 1$ es necesario que la potencia sea máxima, o sea, que $P' = IV = 5 \cdot 110 = 550$ W; la diferencia $P' - P = \Delta P = 220$ W es la potencia que ha de ser absorbida por el condensador C; la potencia instantánea absorbida por el condensador es: $\Delta P = 440$ W y la diferencia de potencial entre sus armaduras será:

$$V' = \frac{\Delta P}{I} = \frac{440}{5} = 88\text{ V}$$

De $V' = IX_C$ se tiene que la reactancia capacitiva es:

$$X_C = V'/I = \frac{88}{5} = 17{,}6\ \Omega$$

Como $X_C = \frac{1}{2\pi fC}$, resulta finalmente que la capacidad del condensador es:

$$C = \frac{1}{2\pi fX_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 60 \cdot 17{,}6} = 0{,}00015\text{ F} = 150\ \mu\text{F}$$

Problema 9-21 Halle los voltajes en los distintos elementos del circuito que se muestran en la Figura 9-12 si $V = 100\sqrt{2}$ sen $1000t$ voltios. Suponga que $R = 1000$ ohmios, $L = 2$ henrios y $C = 1$ microfaradio.

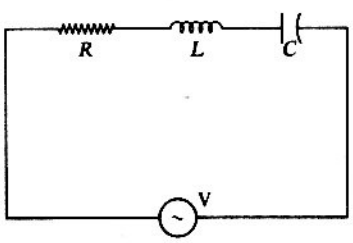


Figura 9-12

Solución. El voltaje a través del oscilador es de 100 V. Además, como $2\pi f = 1000$ rad/seg, se tiene $X_L = 2000\ \Omega$ y $X_C = 1000\ \Omega$, de donde $Z = 1410\ \Omega$.

Como $I = V/Z$, se tiene que $I = 100/1410 = 0{,}071$ A.

Se puede emplear esta corriente para hallar la caída de voltaje a través de los elementos separados porque I es igual en todo el circuito. Como $V_R = IR$, $V_L = IX_L$, $V_C = IX_C$, se tiene que:

$$V_R = (0{,}071)(1000) = 71\text{ V};\quad V_L = (0{,}071)(2000) = 142\text{ V};\quad V_C = (0{,}071)(1000) = 71\text{ V}$$

Además, como el voltaje de la fuente es de 100 V, los voltajes no se suman directamente porque: $V_R + V_L + V_C = 284$ V y no 100 V. La razón de esto es que los tres voltajes no están en fase.

Problema 9-22 Un circuito funciona a $360/2\pi$ hertzios y contiene un condensador de 1 microfaradio y una resistencia de 20 ohmios. ¿Cuál es la magnitud de un inductor que se debe agregar en serie para que el ángulo de fase del circuito sea cero? ¿Cuál es la corriente en el circuito si se aplica un voltaje de 120 voltios?

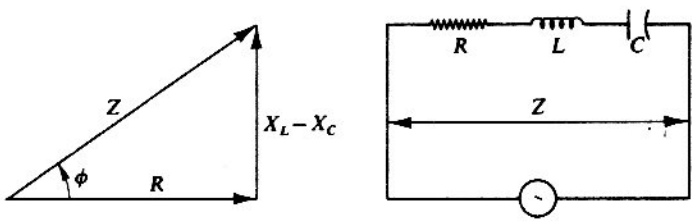


Figura 9-13

Solución. Según la Figura 9-13 la condición $\phi = 0$ significa que $X_L = X_C$. Se dice entonces que el circuito está en resonancia. Haciendo $X_L = X_C$ se obtiene:

$$2\pi \frac{360}{2\pi} L = \frac{1}{360\,C} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{(360)^2(1 \cdot 10^{-6})} = 7{,}7\text{ H}$$

Observe que se necesita una inductancia muy grande para una resonancia a bajas frecuencias. Cuando $X_L = X_C$ vemos que $R = Z$. Entonces:

$$I = V/Z = V/R = 120\text{ V}/20\ \Omega = 6\text{ A}$$

Problema 9-23 ¿Cuál es la frecuencia de resonancia de un circuito que contiene una bobina de 2,5 henrios de inductancia y un condensador de capacidad de 40 microfaradios?

Solución. Empleando la fórmula: $f = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ se obtiene:

$$f = \frac{1}{2(3{,}14)\sqrt{2{,}5\text{ H} \cdot 40 \cdot 10^{-6}\text{ F}}} = \frac{1}{6{,}28\sqrt{100 \cdot 10^{-6}\text{ H} \cdot \text{F}}} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 10 \cdot 10^{-3}\sqrt{\text{H} \cdot \text{F}}} = 16\text{ ciclos/seg}$$

Verificación de las unidades:

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\text{H} \cdot \text{F}}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{V}{A/S} \cdot \dfrac{C}{V}}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{C \cdot S}{A}}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{A \cdot S \cdot S}{A}}} = \frac{1}{\sqrt{S^2}} = \frac{1}{S}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Una resistencia de 20 ohmios e inductancia 0,1 henrio está en serie con un condensador y una fuente de 110 voltios y 60 ciclos. El condensador se puede ajustar para que haya resonancia en el circuito. Calcule la capacitancia del condensador y las caídas de voltaje a través de la bobina y el condensador.

2. Un inductor de 1 henrio tiene una resistencia de 40 ohmios y se conecta a una diferencia de potencial de 30 voltios. *a*) ¿Cuál es el aumento de corriente cuando ha alcanzado una magnitud igual a la mitad de su valor final? *b*) ¿Cuánto demora en alcanzar el 90% de su valor final? *c*) ¿Cuánta energía se almacena en el inductor?

3. Una auto inducción de reactancia 20 Ω, un condensador de reactancia de 30 Ω se conectan en serie con una resistencia de 15 Ω a una línea de corriente alterna de 60 ciclos/seg y diferencia de potencial eficaz 120 V. Calcular *a*) Voltaje en los bornes de cada parte del circuito. *b*) Corriente eficaz del circuito. *c*) Corriente y voltaje máximos. *d*) Expresiones para voltaje y corriente instantáneas en la línea.

4. Una bobina de resistencia 20 Ω y autoinducción 25 m henrios se conecta en serie a una resistencia pura de 15 Ω y un condensador de 400 μf, el conjunto se conecta a una línea de corriente alterna de 120 V y 60 ciclos. Calcular; *a*) el voltaje en los bornes de la bobina. *b*) El ángulo de fase.

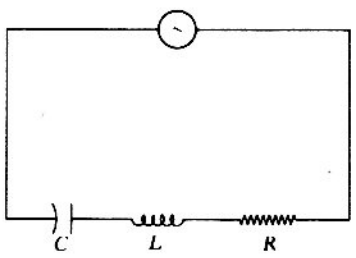
5. 

Figura 9-14

Halle los voltajes en los elementos de la (Fig. 9-14). Si: V = 150 V, $R = 100\ \Omega$, $X_L = 50\ \Omega$, $X_c = 50\ \Omega$. *b*) Potencia consumida.

CAPITULO 10

Instrumentos de medida

Galvanómetro. Se emplea en la detección y medida de corrientes pequeñas. Todos los tipos están basados en el mismo fundamento y se ajustan a las siguientes características esenciales: Una bobina de cuadro móvil sometida a la acción de un campo magnético. Cuando la corriente recorre el arrollamiento de la bobina, ésta acusa la interacción de la corriente con el campo, girando. El ángulo descrito por el cuadro de la bobina da una medida de la corriente que pasa por ella. (Fig. 10-1.)

Amperímetro. Es un galvanómetro modificado para que sea capaz de medir corrientes de elevada intensidad. La modificación suele consistir en acoplar al galvanómetro una resistencia en paralelo.

Además del tipo descrito se utilizan otros amperímetros, fundamentados en el calor desarrollado en el circuito por el paso de la corriente y cuyo valor es proporcional al cuadrado de la intensidad, lo que les hace aptos para corrientes continuas o alternas, indistintamente.

Voltímetro. Si se conecta al galvanómetro una resistencia en serie el aparato permite la medida de la diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito, ya que la corriente que recorre la bobina es proporcional a la diferencia de potencial entre dichos puntos. El aparato se llama voltímetro.

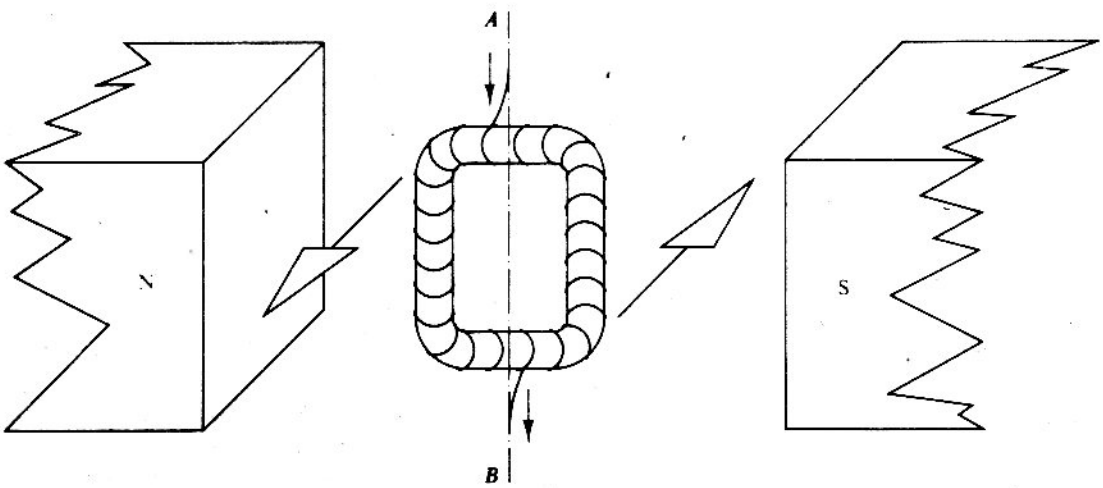


Figura 10-1

Puente de Wheatstone. La medida de resistencias de forma precisa y rápida suele hacerse por medio del llamado «puente de Wheatstone», cuyo montaje y funcionamiento ilustra la Figura 10-2. En ella R_1, R_2 y R_3 son resistencias conocidas, mientras R_x representa la resistencia cuyo valor se desea hallar. Para ello se cierra el circuito y se ajusta la resistencia R del galvanómetro hasta que éste no acuse paso de corriente. En ese momento las diferencias de potencial entre AB, BC, CD y DA son iguales y las intensidades I_1 e I_2 serán proporcionales a las resistencias correspondientes:

$$I_1 \cdot R_2 = I_2 R_3$$

$$I_1 \cdot R_1 = I_2 R_x$$

dividiendo ambas igualdades:

$$R_x = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2} \qquad (10\text{-}1)$$

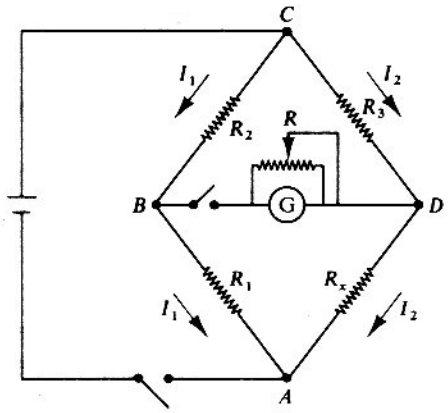


Figura 10-2

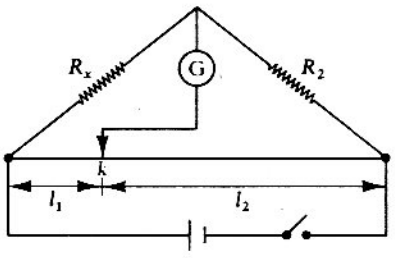


Figura 10-3

En la práctica se utiliza frecuentemente una modificación llamada *puente de hilo* (Fig. 10-3), en la cual las resistencias R_1 y R_3 se sustituyen por un hilo de sección constante y resistencia determinada; mediante una conexión móvil k se varía la relación R_1/R_3, ya que es igual a la que existe entre las longitudes parciales l_1 y l_2 del hilo. Cuando el galvanómetro indica que el puente está equilibrado,

$$R_x = \frac{l_1}{l_2} R_2 \qquad (10\text{-}2)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 10-1 Un galvanómetro de resistencia 10 ohmios se fija a un shunt de resistencia 0,5 ohmios cuando se emplea como amperímetro de desviación total de la escala de 5 amperios. ¿Qué corriente pasa por el galvanómetro cuando hay desviación máxima del indicador? ¿Que resistencia se debe emplear y cómo se debe conectar si el galvanómetro se emplea como un voltímetro con desviación máxima de 40 voltios?

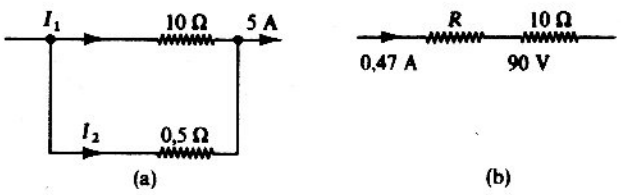


Figura 10-4

Solución. Como no hay acumulación de carga, $I_1 + I_2 = 5$ A cuando el galvanómetro se emplea como amperímetro, como se indica en la parte (a) de la Figura 10-4. Las caídas de potencial a través del amperímetro y del shunt son iguales. Entonces:

$$10\,\Omega \cdot I_1 = 0{,}5\,\Omega \cdot I_2 \quad \therefore \frac{I_1}{I_2} = \frac{0{,}5}{10} \quad \text{o} \quad \frac{I_1}{I_1 + I_2} = \frac{1}{10{,}5} \quad \therefore I_1 = \frac{5\text{ A}}{10{,}5} = \frac{50}{105}\text{ A} = 0{,}47\text{ A}$$

El galvanómetro debe tener una resistencia en serie con él, como se indica en la parte (b) de la Figura 10-4, cuando se emplea como voltímetro. Hay una desviación total del indicador de la escala cuando pasa una corriente de 0,47 A por el galvanómetro. La caída de potencial a través del galvanómetro es:

$$V = IR = 0{,}47\text{ A} \cdot 10\,\Omega = 4{,}7\text{ V}$$

40 V es el potencial a través de R y el galvanómetro. Entonces, 35,3 V es la caída de potencial a través de la resistencia en serie, ya que 40 V − 4,7 V = 35,3 V. Entonces tiene una resistencia:

$$R = \frac{35{,}3\text{ V}}{0{,}47\text{ A}} = 75{,}1\,\Omega$$

Problema 10-2 La bobina de un galvanómetro tiene una resistencia de 30 ohmios. Si una corriente de 0,05 amperios produce una desviación completa de la escala, ¿qué resistencia en serie se debe conectar a la bobina para que produzca una desviación de 100 voltios?

Solución. Como el voltaje aplicado es de 100 V o menos y como la corriente máxima es de 0,05 A, la resistencia total se halla aplicando la ley de Ohm. Por tanto,

$$R = E/I = 100\text{ V}/0{,}05\text{ A} = 2000\,\Omega$$

Esta resistencia total se debe conectar a la fuente de 100 V. Como la bobina tiene una resistencia de 30 Ω, la resistencia adicional debe ser de 2000 − 30 = 1970 Ω.

Problema 10-3 La bobina de un galvanómetro tiene una resistencia de 25 ohmios. Una corriente de 0,1 amperio produce una desviación completa de la escala. ¿Qué shunt se necesita para convertir el galvanómetro en un amperímetro que indique una desviación completa de la escala para una corriente de 5 amperios?

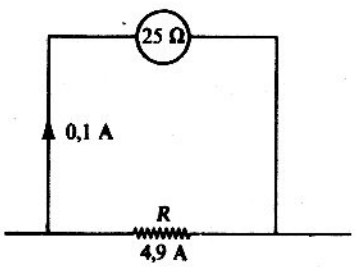


Figura 10-5

Solución. Como la corriente que pasa por la bobina es de 0,1 A, la corriente restante debe pasar por el shunt. Es decir, la corriente que pasa por el shunt es de $5 - 0{,}1 = 4{,}9$ A. El shunt y la bobina se conectan en paralelo; por tanto, la caída de voltaje en ambos es la misma. Así:

$$E_{\text{bobina}} = IR = 0{,}1 \text{ A} \cdot 25\ \Omega$$
$$E_{\text{shunt}} = IR = 4{,}9 \cdot R$$

Igualando las dos exprexiones se obtiene:

$$0{,}1 \text{ A} \cdot 25\ \Omega = 4{,}9 \text{ A} \cdot R$$

Por tanto,

$$R = \frac{0{,}1 \text{ A} \cdot 25\ \Omega}{4{,}9 \text{ A}} = 0{,}51\ \Omega$$

Problema 10-4 Un amperímetro tiene una resistencia de 0,002 ohmios e indica 1 miliamperio por cada división de la escala. ¿Qué resistencia se debe conectar para que con dicho aparato se puedan leer 20 miliamperios por división?

Solución. Como pasarían 20 mA por el circuito y 1 por el amperímetro, 19 mA pasan por el shunt. Entonces el voltaje del amperímetro y el shunt son iguales porque están en paralelo y, por tanto, la caída de voltaje IR son iguales. Entonces:

Caída de potencial en el amperímetro = caída de voltaje en el shunt

$$\therefore\ 1 \text{ mA} \cdot (0{,}002\ \Omega) = 19 \text{ mA} \cdot R$$

$$R = \frac{1 \text{ mA} \cdot 0{,}002\ \Omega}{19 \text{ mA}} = 0{,}000105\ \Omega$$

Problema 10-5 Un voltímetro tiene una resistencia de 5000 ohmios y registra 10 voltios por cada división de la escala. ¿Qué resistencia se debe conectar a este instrumento para que indique 100 voltios por cada división de la escala?

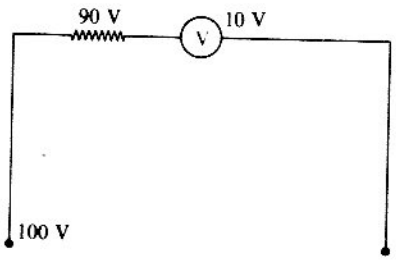


Figura 10-6

Solución. Para aumentar la lectura del aparato se debe conectar una resistencia en serie con él. Cuando se conectan como lo indica la Figura 10-6, hay una caída de potencial de 10 V en el voltímetro y una caída de potencial de 90 V en la resistencia para producir una caída total en el circuito de 100 V. Como el voltímetro y la resistencia están conectados en serie, la misma corriente pasa por ellos. Entonces:

$$E_{\text{voltímetro}} = IR = I \cdot 5000\ \Omega = 10 \text{ V}$$
$$E_{\text{resistencia}} = IR = 90 \text{ V}$$

Igualando los valores de I que dan las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$10/5000 = 90/R \text{ y } R = (90 \cdot 5000)/10 = 45\,000\ \Omega$$

Entonces se debe conectar en serie una resistencia de 45 000 Ω al voltímetro para poder leer 100 V/división en vez de 10 V/división.

Problema 10-6 Un amperímetro tiene una resistencia de 0,1 ohmio y su shunt tiene una resistencia de 0,00005 ohmios. ¿Qué corriente pasa por el amperímetro cuando la corriente total es de 2 amperios?

Solución. Sea I la corriente que pasa por el amperímetro; entonces, $2 - I$ A es la corriente que pasa por el shunt. Por estar conectados en paralelo, la caída de potencial en ambos es igual; por consiguiente, los IR son iguales. Así,

$$IR \text{ (amperímetro)} = IR \text{ (shunt)}$$

$$I(0{,}1) = (2 - I)(0{,}00005) \quad \text{o} \quad 0{,}10005I = 0{,}0001 \quad \therefore\ I = 0{,}0001/0{,}10005 = 0{,}001 \text{ A}$$

Problema 10-7 Un amperímetro de resistencia despreciable se conecta como lo indica la Figura 10-7. ¿Qué corriente indica cuando se conecta a un voltímetro de 1000 ohmios con la resistencia de 500 ohmios?

Solución. Cuando se conectan las dos resistencias en paralelo, la resistencia combinada está dada por:

$$1/R = 1/500 + 1/1000 = 3/1000 \quad \therefore\ R = 1000/3 = 333\ \Omega$$

Entonces,

$$I = E/R = 10 \text{ V}/333\ \Omega = 0{,}03\ \Omega$$

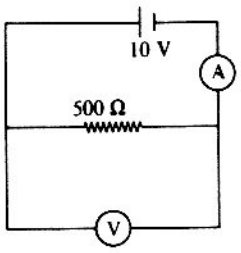


Figura 10-7

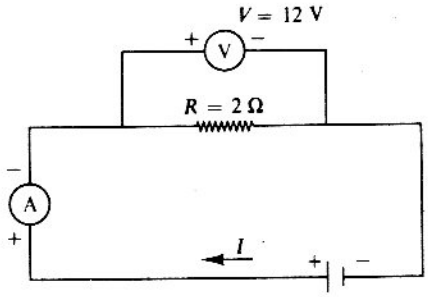


Figura 10-8

Problema 10-8 El circuito de la Figura 10-8 muestra los siguientes datos: batería de 12 voltios; resistencia de 2 ohmios; sensibilidad del voltímetro, 100 ohmios por voltio. Halle: *a*) la corriente total en la resistencia; *b*) la corriente en el voltímetro; *c*) la corriente total en el amperímetro.

Solución. *a*) La corriente en la resistencia es:

$$I_R = V/R = 12/2 = 6 \text{ A}$$

b) El mismo voltaje se aplica al voltímetro y a la resistencia. La corriente en el voltímetro es:

$$I_V = V/R = 12/(100 \cdot 12) = 0{,}01 \text{ A}$$

c) La corriente que pasa por el voltímetro es muy pequeña. La corriente que pasa por el amperímetro y el shunt es la corriente total. Como la resistencia y el voltímetro están en paralelo, la corriente total es:

$$I_t = I_R + I_V = 6 + 0{,}01 = 6{,}01 \text{ A}$$

Problema 10-9 Muestre los errores que se cometen al medir la resistencia con un amperímetro y un voltímetro cuando se conectan como lo indican las Figuras 10-9 y 10-10. La resistencia interna del voltímetro es de 24 000 ohmios; resistencia interna del amperímetro, 0,03 ohmios; lectura del voltímetro, 120 voltios; lectura del amperímetro, 0,4 amperios.

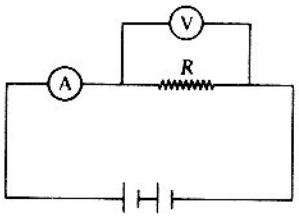


Figura 10-9

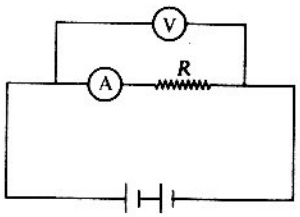


Figura 10-10

Solución. *a*) El amperaje en el amperímetro es el amperaje total en el circuito. Pero como parte de este amperaje se necesita para hacer funcionar el voltímetro hay una inexactitud cuando se mide la resistencia en la carga; se mide a partir de $V = IR$. (Fig. 10-9.)

b) Amperaje en el voltímetro: $I_V = V/R_V = 120/24\,000 = 0{,}005$ A.

c) Amperaje en la carga: $I_A = I_C + I_V$ o $I_C = I_A - I_V = 0{,}4 - 0{,}005 = 0{,}395$ A.

d) Resistencia corregida en la carga: $R = V/I_C = 120/0{,}395 = 303{,}8\ \Omega$.

e) Resistencia sin corregir: $R = V/I = 120/0{,}4 = 300\ \Omega$.

f) El error es: $0{,}005/0{,}395 = 1{,}26\ \%$.

g) En la Figura 10-10 el amperímetro indica únicamente la corriente que pasa por la carga o 0,395 A. La lectura del voltímetro es muy alta, porque el voltaje requerido para hacer funcionar el amperímetro se refleja en la lectura del voltímetro.

1. El voltaje en el amperímetro es función de la corriente que pasa por el amperímetro y la resistencia:

$$V_A = I_A R_A = 0{,}395 \cdot 0{,}03 = 0{,}012 \text{ V}$$

2. El voltaje en la carga es la diferencia de los dos voltajes:

$$V_C = V - V_A = 120 - 0{,}012 = 119{,}98 \text{ V}$$

3. El error es:

$$V_A/V_C = 0{,}012/119{,}98 = 0{,}0001 = 0{,}01\ \% \text{ error}$$

Esto muestra que es más precisa la medida que da la Figura 10-10.

Problema 10-10 Dos conductores del mismo material y longitud y diferente área seccional se conectan en serie y después en paralelo. Cuando se aplica una diferencia de potencial a la combinación, ¿qué conductor se calienta más en cada caso?

Solución. La resistencia de cada conductor es de la forma $R = \rho l/A$. Como la resistividad y la longitud son las mismas en cada caso: $R_1/R_2 = A_2/A_1$.

a) Cuando los conductores están en serie, la misma corriente pasa por cada uno. Entonces la relación entre los calentamientos de cada alambre está dada por:

$$Q_1/Q_2 = \frac{0{,}24i^2R_1}{0{,}24i^2R_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{A_2}{A_1}$$

Esto dice que el calentamiento es mayor en el conductor de menor área seccional.

b) Cuando los conductores están en paralelo, corrientes diferentes pasan por ellos y la diferencia de potencial a través de cada uno es igual. Entonces:

$$\frac{Q_1'}{Q_2'} = \frac{V^2/R_1}{V^2/R_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{A_1}{A_2}$$

Esto dice que el calentamiento es mayor en el conductor de mayor área seccional.

Problema 10-11 Un conjunto de pilas de fuerza electromotriz total de 10 voltios y resistencia interna despreciable se conecta en serie con dos resistencias. Un voltímetro de 4000 ohmios se conecta como lo indican las Figuras 10-11 y 10-13, e indica 3 y 5 voltios, respectivamente. ¿Cuál es la resistencia de las dos resistencias?

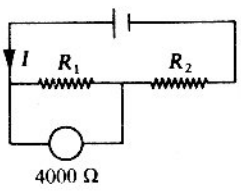


Figura 10-11

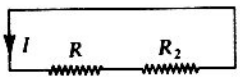


Figura 10-12

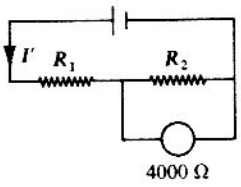


Figura 10-13

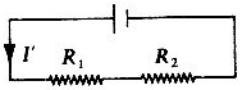


Figura 10-14

Solución. El circuito de la Figura 10-11 es equivalente al circuito de la Figura 10-12, con

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{4000\ \Omega} \qquad \therefore\ R = \frac{4000R_1\ \Omega}{4000\ \Omega + R_1}$$

Como hay una caída de potencial de 3 V a través de la resistencia R, hay una caída de 8 V a través de R_2. $3\ \text{V} = IR$ y $7\ \text{V} = IR_2$.

$$\therefore\ R = \frac{4000R_1\ \Omega}{4000\ \Omega + R_1} = \tfrac{3}{7}R_2 \tag{1}$$

Las Figuras 10-13 y 10-14 muestran la segunda conexión del voltímetro y el circuito equivalente; entonces:

$$R' = \frac{4000\ R_2\ \Omega}{4000\ \Omega + R_2} \quad \text{y} \quad 5\ \text{V} = I'R_1 = I'R' \qquad \therefore\ R' = \frac{4000\ R_2\ \Omega}{4000\ \Omega + R_2} \tag{2}$$

De las ecuaciones (1) y (2) se obtiene:

$$8000\ R_1\ \Omega = 4000\ R_2\ \Omega + R_1R_2 \quad \text{y} \quad 4000\ R_2\ \Omega = 4000\ R_1\ \Omega + R_1R_2$$

Restando estas dos últimas ecuaciones tenemos que:

$$12\,000\ R_1 = 8000\ R_2 \qquad \therefore\ R_1 = \frac{2}{3}\ R_2$$

Al remplazar estos valores en (1) y (2) se obtiene:

$$R_1 = \frac{4000\ \Omega}{3} = 1333\ \Omega \quad \text{y} \quad R_2 = \frac{4000\ \Omega}{2} = 2000\ \Omega$$

Problema 10-12 Una resistencia variable se conecta en serie con una pila de 2 voltios y un amperímetro para que se produzca una desviación completa del indicador del amperímetro que tiene lugar si la corriente es de 2 miliamperios. ¿Qué resistencia colocada en serie con el circuito produce una lectura de $1/f$? El aparato se calibra para medir resistencias en esta

base, pero la fuerza electromotriz disminuye el 5 % y la resistencia variable se ajusta para que haya de nuevo una desviación completa del indicador. ¿Qué porcentaje de error se comete con una resistencia de 4000 ohmios?

Solución. La resistencia total del circuito cuando el aparato indica una desviación completa es:

$$R = E/I = \frac{2\ \text{V}}{2 \cdot 10^{-3}\ \text{A}} = 1000\ \Omega$$

Si se agrega una resistencia desconocida R' al circuito se produce una lectura $(1/f)$ mA en el aparato; entonces:

$$R + R' = \frac{2\ \text{V}}{(1/f)2 \cdot 10^{-3}\ \text{A}} = 1000 f\ \Omega \quad \therefore\ R' = (1000 f\ \Omega - 1000\ \Omega) = 1000(f - 1)\ \Omega$$

Como la f.e.m. disminuye el 5 %, o sea, a 1,9 V, para que haya una desviación completa la resistencia del circuito es ahora:

$$R' = \frac{1{,}9\ \text{V}}{10^{-3}\ \text{A}} = 1900\ \Omega$$

y si se agrega una resistencia de 4000 Ω, la corriente es:

$$1{,}9\ \text{V}/(1900 + 4000)\ \Omega = \frac{1{,}9}{5900}\ \text{A}$$

Al calibrar el aparato, cuando la caída de potencial es un tercio de su valor, la resistencia desconocida es:

$$R' = 1000(3 - 1) = 2000\ \Omega$$

El error en la lectura es de 2000 Ω, o sea:

$$\frac{2000}{4000} \cdot 100\ \% = 50\ \%$$

Problema 10-13 La resistencia de un galvanómetro de cuadro es de 10 ohmios, y una corriente de 0,05 amperios le hace desviarse toda la escala. Se desea convertirle en un amperímetro que indique 20 amperios para la escala completa. El único shunt disponible tiene una resistencia de 0,05 ohmios. ¿Qué resistencia ha de conectarse en serie con el cuadro?

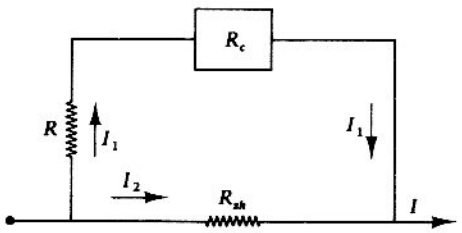


Figura 10-15

Solución. Según la Figura 10-15, la intensidad I_2 de la corriente que circula por el shunt es:

$$I_2 = I - I_1 = 19{,}95\ \text{A}$$

Un amperímetro siempre ha de conectarse en serie por ser un instrumento de resistencia muy pequeña. Entonces:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_{sh}}{R + R_c} \quad \therefore\ R = \frac{I_2 R_{sh}}{I_1} - R_c = \frac{19{,}95(0{,}05)}{0{,}05} - 10 = 9{,}95\ \Omega$$

Problema 10-14 Una resistencia de 500 ohmios y otra de 300 se conectan en serie a una línea de 80 voltios. Un voltímetro fijado entre los extremos de la resistencia de 500 ohmios indica 40 voltios. Calcule: *a*) la resistencia del voltímetro; *b*) la indicación del mismo voltímetro cuando se fija en los extremos de la resistencia de 300 ohmios.

Solución. *a*) Si el voltímetro conectado a los extremos de la resistencia de 500 Ω indica 40 V, los extremos de la resistencia de 300 Ω también están a 40 V, luego la corriente en el circuito es: $I = V/R = 40\ \text{V}/300\ \Omega = 0{,}133\ \text{A}$.

Esta corriente se reparte entre el instrumento y la resitencia de 500 Ω así:

$I_{500} = 40\ \text{V}/500\ \Omega = 0{,}08\ \text{A}$, luego por el voltímetro pasa:

$I_v = 0{,}133\ \text{A} - 0{,}08\ \text{A} = 0{,}053\ \text{A}$, por consiguiente su resistencia es:

$R = V/I = 40\ \text{V}/0{,}053\ \text{A} = 755\ \Omega$.

b) Si el voltímetro se conecta en los extremos de la resistencia de 300 Ω, se forma una resistencia de conjunto cuyo valor será:

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{300\ \Omega} + \frac{1}{755\ \Omega} \quad \therefore \quad R_c = 215\ \Omega.$$

La resistencia total del circuito es $R_T = 500\ \Omega + 215\ \Omega = 715\ \Omega$ y por tanto la corriente es:

$I = V/R_T = 80\ V/715\ \Omega = 0{,}112\ \text{A}$ y la lectura del voltímetro:

$V = IR_c = 0{,}112\ \text{A}\ 215\ \Omega = 24$ voltios.

Problema 10-15 El punto *A* de la Figura 10-16 se mantiene a un potencial constante por encima del potencial de la tierra. $R_1 = 1000$ ohmios; $R_2 = R_3 = 5000$ ohmios. Un voltímetro de 150 voltios y de resistencia 1000 ohmios indica 40 voltios, cuando se conecta entre el punto *C* y la tierra. *a*) ¿Cuál era el potencial del punto *C* por encima del de la tierra antes de conectar el voltímetro? *b*) ¿Cuál es el potencial del punto *A* por encima del potencial de tierra?

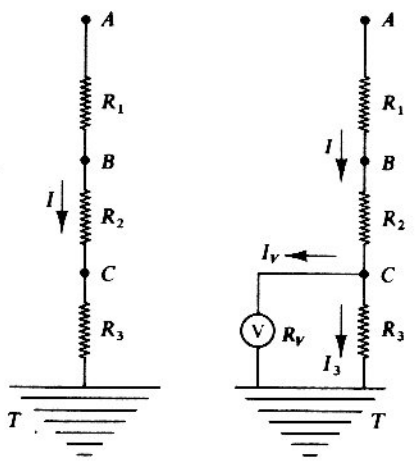


Figura 10-16

Solución. *a*) Veamos primero:

$$V_{AT} = V_A - V_T = I(R_1 + R_2 + R_3)$$

Después de conectado el voltímetro, la intensidad de la corriente en la línea varía según la variación que se haga con las resistencias debido a que el potencial V_{AT} es constante. Para este caso:

$$V_A - V_T = I'\left(R_1 + R_2 + \frac{R_V \cdot R_3}{R_3 + R_V}\right)$$

donde $\frac{R_V \cdot R_3}{R_V + R_3}$ es la resistencia equivalente de las resistencias R_V y R_3 unidas en paralelo. Para esta derivación: $\frac{I_3}{I_V} = \frac{R_V}{R_3}$ resulta que la intensidad $I_3 = \frac{I_V R_V}{R_3}$. Por tanto,

$$I_3 = \frac{V}{R_3} \quad \text{porque} \quad I_V = \frac{V}{R_V}$$

$$\therefore I' = I_V + I_3 = \frac{V}{R_V} + \frac{V}{R_3} = V\left(\frac{R_V + R_3}{R_V \cdot R_3}\right)$$

$$\therefore V_A - V_T = V\left(\frac{R_V + R_3}{R_V \cdot R_3}\right)\left(R_1 + R_2 + \frac{R_V \cdot R_3}{R_V + R_3}\right)$$

que es la diferencia de potencial antes de conectar el voltimetro. Entonces:

$$V_A - V_T = V\left(\frac{R_V + R_3}{R_V \cdot R_3}\right)\left(R_1 + R_2 + \frac{R_V \cdot R_3}{R_V + R_3}\right) = I(R_1 + R_2 + R_3)$$

$$\therefore I = \frac{V[(R_V + R_3)(R_1 + R_2) + R_V R_3]}{R_V R_3(R_1 + R_2 + R_3)}$$

La diferencia de potencial entre el punto C y tierra, antes de conectar el voltímetro, es:

$$V_{CT} = V_C - V_T = IR_3 = \frac{V[R_V R_3 + (R_V + R_3)(R_1 + R_2)]}{R_V(R_1 + R_2 + R_3)}$$

$$\therefore V_C - V_T = V_C = \frac{40[1000 \cdot 5000 + (1000 + 5000)(1000 + 5000)]}{1000(1000 + 5000 + 5000)} = 149 \text{ V}$$

b) Para calcular el potencial del punto A por encima del de la tierra tenemos que:

$$V_{AT} = V_A - V_T = I(R_1 + R_2 + R_3);\ V_{CT} = V_C - V_T = IR_3$$

Al dividir las dos ecuaciones miembro a miembro se obtiene:

$$\frac{V_{AT}}{V_{CT}} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_3} = \frac{1000 + 5000 + 5000}{5000} = 2{,}2$$

$$\therefore V_{AT} = 2{,}2\ V_{CT} = 2{,}2(149 \text{ V}) = 328 \text{ V}$$

Entonces el potencial del punto A por encima del potencial de la tierra es $V_{AT} = 328$ V porque $V_T = 0$.

Problema 10-16 Dos voltímetros de 150 voltios cada uno y de resistencias 10 000 y 100 000 ohmios se conectan en serie a una línea de corriente continua de 120 voltios. Calcule la lectura de cada voltímetro. (Fig. 10-17.)

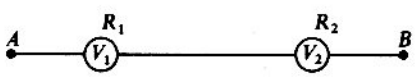


Figura 10-17

Solución. $V_{AB} = 120$ V, luego la intensidad de la corriente que circula por los voltímetros es:

$$I = \frac{V_{AB}}{R_1 + R_2} = \frac{120}{10\,000 + 100\,000} = \frac{3}{2750}\ \text{A}$$

La lectura del primer voltímetro es:

$$V_1 = IR_1 = \frac{3}{2750} \cdot 10^4 = \frac{3}{275} \cdot 10^3\ \text{V} = 10{,}9\ \text{V}$$

La lectura del segundo voltímetro es:

$$V_2 = IR_2 = \frac{3}{2750} \cdot 10^5 = \frac{3}{275} \cdot 10^4\ \text{V} = 109\ \text{V}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Deduzca la condición de equilibrio de un puente de Wheatstone aplicando los lemas de Kirchhoff.
2. Halle la precisión del valor de una resistencia calculada mediante un puente de hilo en el que la resistencia patrón presenta un error del 3 por 100 y cuyo cursor aprecia $l_1 = 328 \pm 1$ milímetro y $l_2 = 931 \pm 1$ milímetro.
3. ¿Puede utilizarse un amperímetro de corriente continua en alterna? ¿Y viceversa?
4. Un galvanómetro tiene una resistencia interna de 20 Ω, y su aguja se desvía totalmente con una corriente de 0,5 A. ¿Qué es necesario hacer para que funcione como amperímetro y marque hasta 10 A?
   b) Como voltímetro y lea hasta 200 V.
5. Una resistencia de 800 Ω y otra de 600 Ω se conectan en serie a una línea de 150 V. Un voltímetro conectado a los extremos de la primera señala 75 V. *a*) Calcular la resistencia del voltímetro. *b*) La lectura del voltímetro si se conecta a los extremos de la segunda resistencia.

CAPITULO 11

INDUCCION

Campo magnética y corriente eléctrica

Cálculo de B en las proximidades de un hilo rectilíneo por el que circula una corriente de intensidad *I*

Aplicando la ley de Biot y Savart:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \operatorname{sen} \theta}{r^2}$$

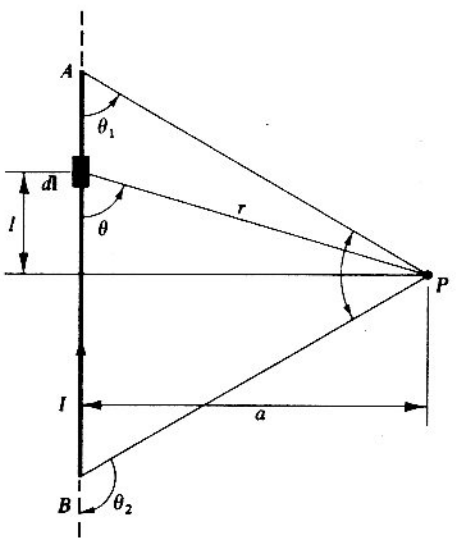


Figura 11-1

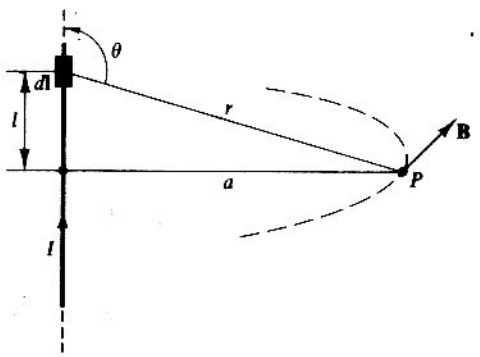


Figura 11-2

Entonces la inducción que hay en *P* producida por la *I* que circula por el hilo, teniendo en cuenta solo el segmento *AB*, será (Fig. 11-1):

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{\operatorname{sen} \theta \cdot dl}{r^2}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a}{l}, \quad l = a \cdot \operatorname{cotg}\theta, \quad dl = -\frac{ad\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}, \quad r = \frac{a}{\operatorname{sen}\theta}$$

queda:

$$B = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_2}^{\theta_1} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

También se puede calcular **B** en un punto próximo a un conductor rectilíneo indefinido por el que circula una corriente de intensidad I:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\theta}{r^2}\, dl$$

De la Figura 11-2 se ve que:

$$r = \alpha \operatorname{cosec}\theta \qquad l = -a \operatorname{cotg}\theta$$

de donde:

$$dl = a \operatorname{cosec}^2\theta\, d\theta$$

que sustituyendo en la integral y teniendo en cuenta los valores de θ para $l = -\infty$ y $l = \infty$ nos da:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta}{a^2 \operatorname{cosec}^2\theta}(a \operatorname{cosec}^2\theta\, d\theta) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

luego:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \text{ wb/m}^2$$

lo que nos dice que el campo magnético es inversamente proporcional a la distancia que separa al punto del conductor, y las líneas de **B** forman circunferencias concéntricas alrededor del conductor situadas en un plano perpendicular a él.

Cálculo de B en un punto del eje de una espira circular por la que circula una corriente de intensidad *I*

Partiendo también de la ley de Biot y Savart:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \operatorname{sen}\theta}{r^2}$$

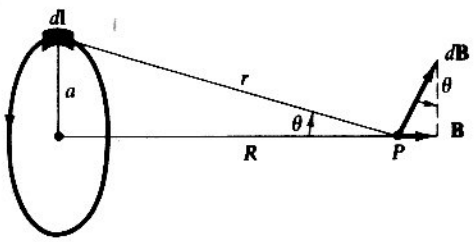


Figura 11-3

En este caso se ve que siempre **r** es perpendicular a $Id\mathbf{l}$, luego el sen θ del producto vectorial siempre valdrá la unidad. También se observa que los diferentes $d\mathbf{B}$, producidos en P por los distintos $Id\mathbf{l}$ de que consta la espira, son siempre perpendiculares a **r** en el punto P. Por la simetría

del problema, las componentes de **B** que no son paralelas al eje anulan dos a dos. Luego solo interesan las componentes $d\mathbf{B}$ sen θ (las que tienen la dirección del eje), quedando:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\text{sen } \theta}{r^2} \int dl$$

Teniendo en cuenta que:

$$r = (a^2 + R^2)^{1/2} \quad \text{sen } \theta = \frac{a}{r}$$

queda:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + R^2)^{3/2}} \text{ wb/m}^2$$

En el caso de que P esté en el centro de la espira $R = 0$, con lo que resulta:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a} \text{wb/m}^2$$

Si P está lejos de la espira, entonces $R \gg a$ y queda:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2IA}{R^3} \text{wb/m}^2$$

$$A = \text{área de la espira} = \pi a^2$$

Para el caso de tener N espiras muy próximas también son válidas estas ecuaciones con solo multiplicar el resultado por N.

Cálculo de B en el eje de un solenoide

Un solenoide es un conjunto de muchas espiras juntas que forman una bobina cilíndrica. Por tanto, para hallar **B** en el punto P se utiliza el resultado anterior. Si N es el número total de espiras o vueltas y L es la longitud del solenoide, habrá una densidad de espiras por unidad de longitud de N/L. Por tanto, la corriente total en un elemento dx será $I(N/L)\,dx$. Con lo que la ecuación anterior de la inducción en un punto del eje de una espira queda:

$$dB = \frac{\mu_0 NI}{2L} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx$$

para la sección del solenoide de longitud dx.

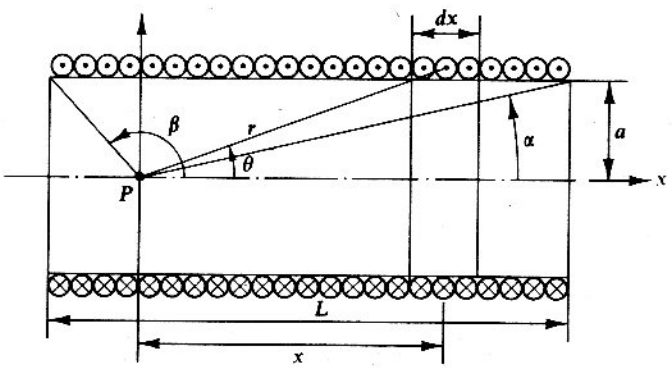


Figura 11-4

Tomando como variable de integración el ángulo que forma el vector posición r con el eje θ, y haciendo las sustituciones:

$$x = a\,\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \qquad dx = -a\,\frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

queda:

$$B = -\frac{\mu_0 NI}{2L}\int_{\beta}^{\alpha} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \frac{\mu_0 NI}{2L}(\cos\alpha - \cos\beta)\ \text{wb/m}^2$$

Si el solenoide es muy largo ($\alpha = 0°$ y $\beta = 180°$) y el punto P está en el centro:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{L}\ \text{wb/m}^2$$

Si P está en uno de los extremos de dicho solenoide muy largo ($\alpha = 90°$ y $\beta = 180°$):

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2L}\ \text{wb/m}^2$$

Para hallar el valor de **H** en estos casos no hay que hacer más que dividir el valor de **B** por μ_0, ya que

$$H = \frac{B}{\mu_0}$$

Fuerza ejercida por un campo magnético sobre un conductor por el que circula una corriente de intensidad *I*

Experimentalmente se encontró que la fuerza sobre un elemento de corriente $Id\mathbf{l}$ es:

$$d\mathbf{F} = Id\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$
$$dF = Idl \operatorname{sen}\theta$$

siendo θ el ángulo formado por $d\mathbf{l}$ con **B**; por tanto, el sentido de $d\mathbf{F}$ vendrá dado por el producto vectorial $d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$, o sea, que puede utilizarse la regla de la mano izquierda. (Fig. 11-5.)

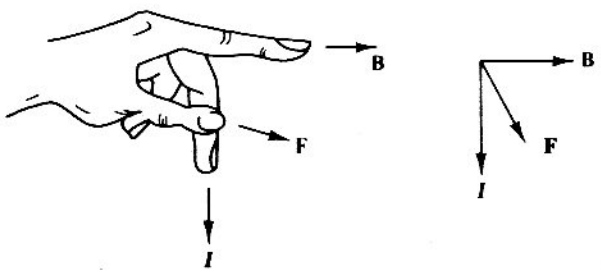


Figura 11-5

En el caso de un conductor rectilíneo de longitud l situado en un campo magnético uniforme, se tiene que:

$$F = BIl \operatorname{sen}\theta$$

siendo máxima cuando el conductor esté colocado perpendicularmente al campo (sen $\theta = 1$),

$$F_{max} = BIl$$

será mínima cuando el conductor esté paralelo a la dirección del campo (sen $\theta = 0$),

$$F_{min} = 0$$

Fuerza entre dos conductores rectilíneos y paralelos

Por uno de ellos circulará la corriente de intensidad I_1 y por el otro una I_2. Suponga que tienen como longitud L, estando separados una distancia r.

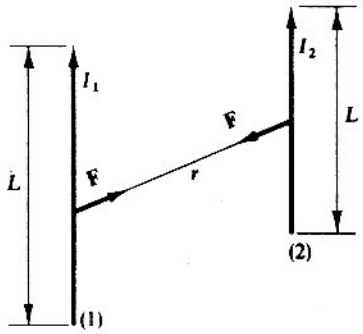


Figura 11-6

Por lo anterior se puede saber que: Inducción magnética creada por I_1 a la distancia r de ella:

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \tag{11-1}$$

Fuerza ejercida sobre el conductor (2) por el que circula I_2 situado en el campo producido por el (1):

$$F = BI_2L \tag{11-2}$$

Sustituyendo (11-1) en (11-2):

$$F = \left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\right) I_2 L$$

quedando:

$$F = 2\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 I_2 L}{r}$$

Si las dos intensidades tienen el mismo sentido, como en la Figura 11-6, la fuerza es de atracción, y si son de sentido contrario tendremos una repulsión.

$\Rightarrow$ La fuerza por unidad de longitud entre 2 alambres es $= \frac{F}{L}$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 11-1 ¿Cuál es el campo magnetizante en un punto situado a 10 centímetros de un alambre que lleva una corriente de 5 amperios?

Solución. Como $H = I/2\pi r$, $H = \dfrac{5\text{ A}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot (0{,}1\text{ m})} = 7{,}9\text{ A/m}$.

Problema 11-2 ¿Cuál es el campo magnétizante en un punto situado en el centro de un alambre circular de 100 vueltas y radio común 10 cm, si transporta una corriente de 1 amperio? *b*) Un solenoide de 200 vueltas y de 25 centímetros de longitud tiene un campo magnetizante de 500 amperios por metro en su centro. ¿Qué corriente pasa para que se produzca esta intensidad de campo?

Solución. *a*) Como $H = NI/2r$, $H = \dfrac{100 \text{ vueltas} \cdot 1 \text{ A}}{(0{,}2 \text{ m})} = 500 \text{ A} \cdot \text{vuelta/m}$.

b) Como $H = NI/r$, $I = Hr/N = \dfrac{500 \text{ A/m} \cdot (0{,}25) \text{ m}}{200 \text{ vueltas}} = 0{,}625 \text{ A}$.

Nota. Se desprecia el término «vueltas» puesto que no tiene unidades; se habría podido dar el campo magnetizante en amperios-vueltas/metros.

Problema 11-3 Dos alambres paralelos, largos y separados 10 centímetros, transportan corrientes de 20 y 30 amperios, respectivamente, en direcciones opuestas. ¿Cuál es el campo magnetizante resultante en el punto medio entre los dos alambres y en el mismo plano? ¿Cuál es el campo magnetizante en el punto X y las direcciones de los campos?

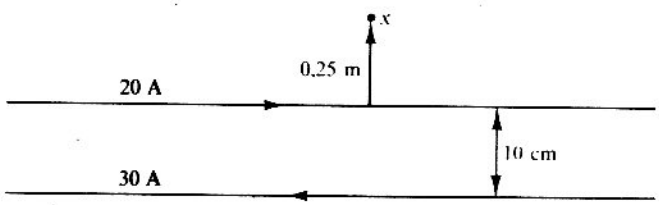


Figura 11-7

Solución. En el punto medio entre los dos alambres existe un campo magnetizante producido por cada uno de los alambres. Para hallar la dirección de este campo se aplica la regla de la mano derecha. Cuando el dedo pulgar de la mano derecha indique en la dirección de la corriente, los dedos se curvan en la dirección del campo. Entonces en dicho punto el campo magnetizante producido por el alambre superior está dirigido hacia el papel y lo mismo sucede con el producido por el alambre inferior. Por tanto, el campo resultante es la suma de estos dos vectores.

Campo magnetizante producido por el alambre superior $= I/2\pi r = 20 \text{ A}/(2\pi \cdot 0{,}05 \text{ m}) = 63{,}7 \text{ A/m}$.

Campo magnetizante producido por el alambre inferior $= I/2\pi r = 30 \text{ A}/(2\pi \cdot 0{,}05 \text{ m}) = 95{,}5 \text{ A/m}$.

Entonces el campo magnetizante en el punto medio es 63,7 A/m + 95,5 A/m = 159,2 A/m, dirigido hacia el papel y perpendicular a la hoja de papel.

En el punto X el campo magnetizante producido por el alambre superior está dirigido hacia afuera de la hoja de papel, y el producido por el alambre inferior, dirigido hacia la hoja de papel; por tanto, la resultante es la diferencia de estos dos vectores.

El campo magnetizante en X producido por el alambre superior $= I/2\pi r = 20 \text{ A}/(2\pi \cdot 0{,}25 \text{ m}) = 12{,}7 \text{ A/m}$.

El campo magnetizante en X producido por el alambre inferior $= I/2\pi r = 30 \text{ A}/(2\pi \cdot 0{,}35 \text{ m}) = 13{,}6 \text{ A/m}$.

El campo resultante es la diferencia de las dos, o sea, 0,9 A/m, dirigida hacia el papel y perpendicular a la hoja de papel, porque ésa es la dirección del vector mayor.

Problema 11-4 Calcule el campo magnetizante en el centro de un cable circular formado por 100 vueltas de alambre, con un radio común de 20 centímetros y llevando una corriente de 15 amperios.

Solución. Para la solución de este problema se emplea la relación $H = \dfrac{NI}{2r}$, la que simplemente es N veces el valor del campo magnetizante en el centro de una sola vuelta; N es el número de vueltas. Por tanto,

$$H = \frac{100 \text{ vueltas} \cdot 15 \text{ A}}{2(0{,}2 \text{ m})} = 3750 \text{ A} \cdot \text{vuelta/m}$$

Problema 11-5 Un alambre de 40 centímetros de largo se coloca perpendicularmente a un campo magnético de poder imanador o vector magnetizante de 80 amperios/metro. Si

la corriente que pasa por el alambre es de 10 amperios, ¿cuál es la magnitud y dirección de la fuerza ejercida sobre el alambre?

Solución. Empleando la regla de la mano izquierda con el dedo índice indicando la dirección de la corriente y el pulgar la dirección del campo, el dedo medio señala la dirección del movimiento; por tanto, el alambre se aleja del observador. La magnitud de la fuerza se calcula a partir de la fórmula: $F = \mu H I l \operatorname{sen} \theta$, $\mu = 1{,}257 \cdot 10^{-6}$ N/A^2, H es 80 A/m, $I = 10$ A, $l = 40$ cm y $\theta = 90°$. Por tanto:

$$F = 1{,}257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} 80 \frac{\text{A}}{\text{m}} 10 \text{ A } (0{,}40 \text{ m}) \cdot \operatorname{sen} 90° = 4 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

Problema 11-6 Una corriente de 200 amperios circula por un alambre de 100 metros de largo y colocado formando un ángulo de 45° con un campo magnético cuya densidad de flujo es de $8 \cdot 10^{-5}$ weber/metro cuadrado. ¿Qué fuerza actúa sobre el alambre?

Solución. Empleando la fórmula $F = BIl \operatorname{sen} \theta$:

$$F = 8 \cdot 10^{-5} \text{ wb/m}^2 \cdot 200 \text{ A} \cdot 100 \text{ m} \cdot \operatorname{sen} 45° = 1{,}1 \text{ wb-A/m}$$

Cambiando weber a su equivalente en N · m/A se obtiene:

$$1{,}1 \text{ wb} \cdot \text{A/m} = 1{,}1 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{A}} \cdot \frac{\text{A}}{\text{m}} = 1{,}1 \text{ N}$$

Problema 11-7 ¿Cuánto trabajo se requiere para mover un polo magnético de 100 microwebers de intensidad, a una distancia de 50 centímetros, a lo largo del eje de un solenoide cuyo campo magnetizante a lo largo del eje es de 500 amperios/metro?

Solución. La fuerza pedida es igual a $mH = 100 \cdot 10^{-6}$ wb $\cdot$ 500 A/m $= 5 \cdot 10^{-2}$ N; la respuesta se da en newtons porque: wb $\cdot \frac{\text{A}}{\text{m}} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{A}} \cdot \frac{\text{A}}{\text{m}} =$ N. Entonces, como trabajo = fuerza · distancia $= 5 \cdot 10^{-2}$ N · 0,5 m $= 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ N · m $= 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ J.

Problema 11-8 Una bobina circular de radio 20 centímetros está formada por dos vueltas de alambre por el cual circula una corriente de 1/10 de amperio. Se coloca paralela a la superficie de la tierra en un punto donde la componente horizontal del campo magnético es de 0,15 amperios/metro. ¿Qué ángulo de desviación indica una aguja magnética que se coloca en el centro de la bobina?

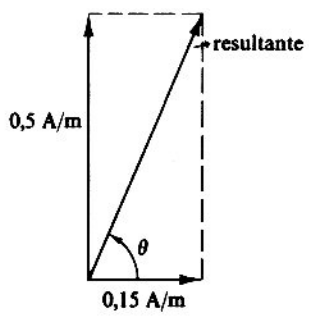


Figura 11-8

Solución. El campo magnetizante en el centro de la bobina se puede calcular empleando la fórmula $H = NI/2r$. Por tanto,

$$H = \frac{2 \text{ vueltas} \cdot (0{,}1 \text{ A})}{2 \cdot (0{,}2 \text{ m})} = 0{,}5 \text{ A/m}$$

La Figura 11-8 muestra el campo resultante en la dirección indicada formando un ángulo θ con la horizontal:

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{campo vertical}}{\text{campo horizontal}} = \frac{0{,}5 \text{ A/m}}{0{,}15 \text{ A/m}} = 3{,}33 \quad \therefore \theta = \text{arc tg } 3{,}33 = (73{,}3)^\circ$$

Problema 11-9 Una bobina de alambre tiene 10 vueltas y produce una densidad de flujo de $5 \cdot 10^{-6}$ weber/metro cuadrado. *a*) Si el diámetro de la bobina es de 20 centímetros y está envuelta de tal manera que la longitud de la bobina se pueda despreciar, ¿cuál es la corriente en el alambre? *b*) Si la bobina tiene una longitud de 12 centímetros, ¿cuál es la corriente en la bobina?

Solución. *a*) En el sistema M.K.S., $B = \mu_0 NI/2r$:

$$r = 10 \text{ cm}; \; N = 10 \text{ vueltas}; \; B = 5 \cdot 10^{-6} \text{ wb/m}^2$$

Resolviendo para I y remplazando los valores se obtiene:

$$I = \frac{2Br}{\mu_0 N} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot (0{,}1)}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10} = 0{,}08 \text{ A}$$

b) En el sistema M.K.S., $l = 0{,}12$ m; $N = 10$ vueltas; $B = 5 \cdot 10^{-6}$ wb/m^2. Como $B = \mu_0 NI/L$, resolviendo para I y remplazando los datos, se tiene que:

$$I = \frac{BL}{\mu_0 N} = \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot (0{,}12)}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10} = 0{,}048 \text{ A}$$

Problema 11-10 Calcule la excitación magnética creada por el segmento AB de un conductor rectilíneo con corriente en el punto C situado en la perpendicular al punto medio de este segmento y a la distancia de 5 centímetros del mismo. Por el conductor fluye una corriente de 20 amperios. El segmento AB del conductor, desde el punto C, se ve con un ángulo de 60°. (Fig. 11-9.)

Solución. La excitación magnética en el punto C será:

$$H = \int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{I \text{ sen } \theta \, dl}{4\pi r^2}, \quad \text{ya que} \quad dH = \frac{Idl \text{ sen } \theta}{4\pi r^2}$$

Pero $l = a \text{ cotg } \theta$ y $dl = -\dfrac{a d\theta}{\text{sen}^2 \theta}$. Además, $r = a/\text{sen } \theta$. Por consiguiente,

$$H = -\frac{I}{4\pi a} \int_{\theta_2}^{\theta_1} \text{sen } \theta \, d\theta = \frac{I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

Según las condiciones del problema, $I = 20$ A,

$$a = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}, \quad \theta_1 = 60^\circ, \quad \theta_2 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Al remplazar estos valores se halla que $H = 31{,}8$ A/m.

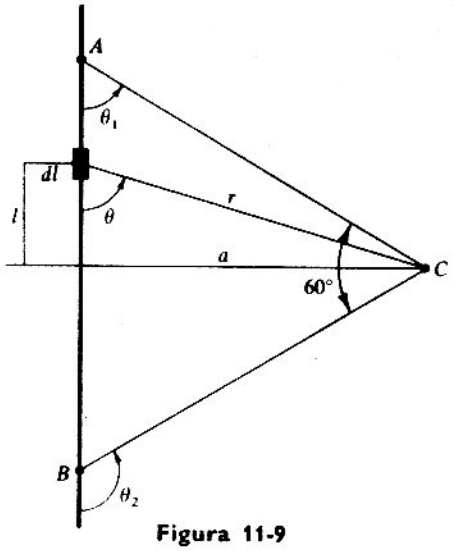


Figura 11-9

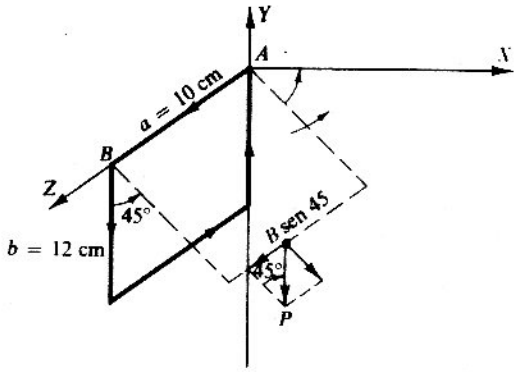


Figura 11-10

Problema 11-11 La masa del alambre del conductor rectangular es de 1/2 gramo por centímetro de longitud y gira alrededor del lado AB como sobre un eje sin rozamiento. La corriente que circula por el conductor es de 20 amperios y con el sentido indicado. Calcule la magnitud y el sentido del vector inducción, paralelo al eje Y, para que el rectángulo forme un ángulo de 45° con el plano YZ.

Solución. Sea **B** la inducción del campo magnético paralelo al eje Y, el lado de 10 cm, libre es perpendicular a **B** y por tanto recibe una fuerza en dirección X,

$$F = I\,a\,B = 20\ \text{A}.\ 0{,}1\ \text{m}.\ B$$

Sobre los lados de 12 cm actúan fuerzas iguales y opuestas, por lo cual se anulan.

Los lados de 12 cm y 10 cm producen, por su peso un momento que debe equilibrarse con el momento de F. El momento producido por la gravedad es la suma de los dos sobre los lados de 12 cm y el producido por el lado de 10 cm, tomando como eje de giro el otro lado de 10 cm, entonces:

$$M_t = (6\ \text{gr}.\ 980\ 1\ \text{m/seg}^2.\ 6\ \text{cm}.\ \text{Sen}\ 45°) \cdot 2 + 5\ \text{gr}.\ 980\ \text{cm/seg}^2 \cdot 120\ \text{sen}\ 45°$$
$$= 4{,}99 \cdot 10^{-3}\ \text{N-m} + 4.16 \cdot 10^{-3}\ \text{N-m} = 9{,}15 \cdot 10^{-3}\ \text{N-m}$$

Este momento debe ser igual al producido por F, por tanto:

$$9{,}15 \cdot 10^{-3}\ \text{N-m} = I\,a\,B \cdot b\ \cos 45° = 20\ \text{A} \cdot 0{,}1\ \text{m} \cdot 0{,}12\ \text{m} \cdot 0{,}707 \cdot B$$

$$\therefore\ B = \frac{9{,}15 \cdot 10^{-3}\ \text{N-m}}{0{,}16968\ \text{A-m}^2} = 5{,}4 \cdot 10^{-2}\ \text{wb/m}^2,\ \text{dirigido hacia arriba}$$

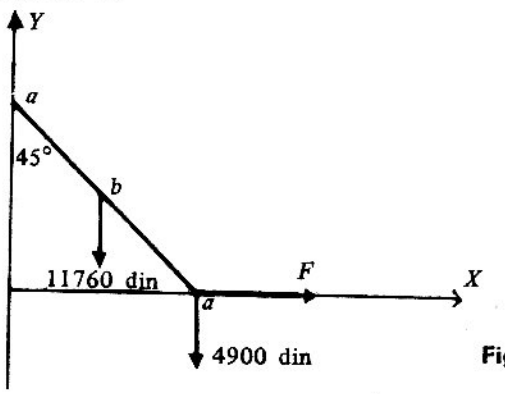


Figura 11-10 A

Problema 11-12 Una línea de potencia está orientada de este a oeste y transporta una corriente de 20 amperios. Halle la fuerza por unidad de longitud que ejerce sobre ella el campo magnético de la tierra, que es 1 gauss.

Solución. Como las líneas del campo magnético de la tierra son perpendiculares al alambre, se tiene:

$$dF = IBdL \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \quad \therefore \frac{dF}{dL} = IB = 20\ \text{A} \cdot 10^{-4}\ T = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{N/m}$$

que es la fuerza por unidad de longitud que ejerce el campo sobre el alambre, que aproximadamente es de 200 dinas, y que representa el peso de 0,2 g del material.

Problema 11-13 ¿Cuál es la fuerza que ejerce el campo magnético sobre el alambre *ACDEG* por el cual pasa una corriente?

Solución. Las fuerzas que actúan sobre los alambres *AC* y *EG* son cero, porque estos alambres son paralelos a las líneas del campo. En este caso, sen $\theta = 0$ y $d\mathbf{L} \times \mathbf{B} = 0$. Considere *CDE* y sobre él el elemento de arco *dL*. El ángulo entre *dL* y *B* es $180° - \varphi$. Entonces la fuerza que ejerce sobre el elemento de arco es:

$$d\mathbf{F} = Id\mathbf{L} \times \mathbf{B} = IdLB \operatorname{sen} (180° - \varphi)\mathbf{k}$$

El vector **k**, unitario, se emplea para designar la dirección de $d\mathbf{F}$. Como $d\mathbf{L}$ y **B** definen un plano, el de la página, el vector fuerza debe ser perpendicular a la hoja.

Según las reglas usuales, el vector unitario **k** está dirigido hacia la página. Para hallar la fuerza total que se ejerce sobre el arco, integre estas fuerzas. Entonces:

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F} = \int \mathbf{k} IB \operatorname{sen} (180° - \varphi) dL$$

Para simplificar esta expresión observe que **k**, *I* y *B* son constantes y se pueden sacar de la integral; entonces:

$$\mathbf{F} = \mathbf{k} IB \int \operatorname{sen} \varphi dL$$

Como $dL = ad\varphi$, se tiene que $\mathbf{F} = \mathbf{k} IBa \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \varphi d\varphi$. Es decir, la fuerza que actúa sobre el arco *CDE* está dirigida hacia la página y su magnitud es $2IBa$, que es la fuerza que actúa sobre el alambre.

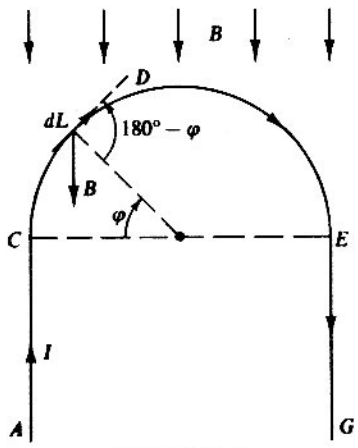


Figura 11-11

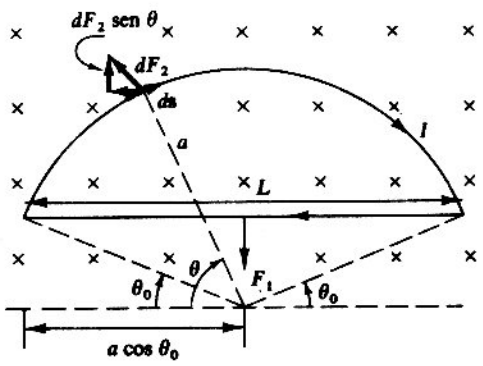


Figura 11-12

Problema 11-14 Halle la fuerza total que ejerce un campo magnético sobre el circuito que se muestra en la Figura 11-12.

Solución. La fuerza que actúa sobre la parte recta del alambre es $F_1 = ILB$ y está dirigida hacia abajo y en el plano de la hoja de papel.

Considere el elemento de fuerza $d\mathbf{F}_2$ que actúa sobre el elemento de arco $d\mathbf{s}$. Como $\mathbf{B}$ y $d\mathbf{s}$ son perpendiculares, se tiene que $dF_2 = IBds$.

Como los distintos vectores $d\mathbf{F}_2$, para los diferentes elementos $d\mathbf{s}$, están en direcciones diferentes, se deben tomar las componentes antes de sumar.

Cada elemento de arco produce una fuerza vertical de magnitud $dF_{2y} = dF_2 \operatorname{sen}\theta$, como se muestra en la Figura 11-12. Como estas componentes están en la misma dirección se pueden sumar directamente. Entonces:

$$F_{2y} = \int \operatorname{sen}\theta\, dF_2 = \int IB \operatorname{sen}\theta\, ds, \text{ y como } ds = ad\,\theta, \text{ entonces:}$$

$$F_{2y} = IBa \int_{\theta_0}^{180-\theta_0} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = IBa\,[\cos\theta_0 - \cos(180 - \theta_0)]$$

Esto, junto con el hecho de que $F_{2x} = 0$ y $F_1 = IBL$, da la solución del problema. Sin embargo, como $\cos\theta_0 - \cos(180^\circ - \theta_0) = 2\cos\theta_0$ y $2(a\cos\theta_0) = L$, vemos que F_{2y} es igual y opuesta a F_1. Entonces la fuerza total que se ejerce sobre el circuito es cero. Este resultado es verdadero para cualquier circuito cerrado en un campo uniforme.

Problema 11-15 Por el conductor AB (muy largo) pasa una corriente de 30 amperios. Por el conductor rectangular, paralelo al alambre, pasa una corriente de 20 amperios. Calcule la magnitud y sentido de la fuerza ejercida sobre el rectángulo por el campo magnético que crea el conductor AB. (Fig. 11-13.)

Solución. Si los conductores transportan corrientes del mismo sentido se atraen; de lo contrario, se repelen. La fuerza F que ejerce el campo del conductor sobre el rectángulo es $F = F_1 - F_2$, con $F_1 > F_2$, por ser $r_1 < r_2$. La inducción magnética creada por el conductor AB es:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{r}$$

entonces la fuerza ejercida sobre el rectángulo por el campo magnético es:

$$F = I'lB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot l \cdot \frac{2II'}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot l \cdot \frac{2II'}{r_1} - \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot l \cdot \frac{2II'}{r_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2lII' \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right) =$$

$$= 10^{-7} \cdot 2 \cdot (0{,}2) \cdot 30 \cdot 20 \cdot \left(\frac{0{,}1 - 0{,}01}{(0{,}01)(0{,}1)}\right) = 216 \cdot 10^{-5}\ \text{N}$$

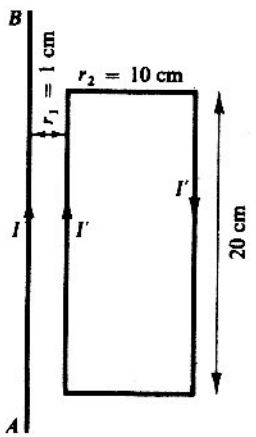


Figura 11-13

Problema 11-16 Por el conductor AB pasa una corriente de intensidad I. *a*) ¿Cuál es la densidad de flujo en la parte sombreada? *b*) ¿Cuál es el flujo magnético $d\phi$ que pasa por la superficie sombreada? *c*) ¿Cuál es el flujo que pasa por la Figura 11-14, $CDEF$?

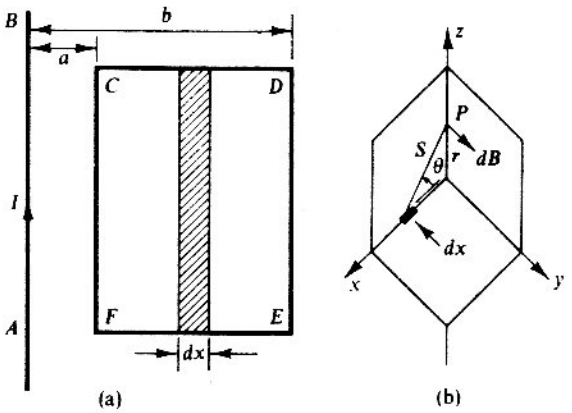


Figura 11-14

Solución. *a*) El elemento de campo magnético está dado por la relación:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{dl \operatorname{sen} \theta}{S^2}$$

siendo dl la longitud de un elemento del conductor, θ el ángulo formado por la dirección del conductor y S la distancia al punto considerado; la relación anterior aplicada a la Figura 11-14(b) se transforma en:

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi r} \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot d\theta$$

Si el conductor es un alambre de longitud infinita, entonces, integrando la expresión anterior entre $-\infty$ y $+\infty$, se obtiene:

$$B = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{x} \int_{\pi}^{0} \operatorname{sen} \theta \, d\theta = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{x} \left(-\cos \theta\right)_{\pi}^{0} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{2}{x} \quad (r = x)$$

b) El flujo magnético que pasa por la superficie rayada de área $l\,dx$ es:

$$d\phi = Bl dx = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{x} \cdot l\,dx$$

c) El flujo magnético que pasa por el área $CDEF$ está dado por:

$$d\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{x} \cdot l\,dx \quad \therefore \phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2Il \int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2Il \left[\ln x\right]_a^b = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot Il \ln \frac{b}{a}$$

Problema 11-17 Una cinta metálica y rectilínea, larga y delgada, de anchura b, transporta una corriente de intensidad I. La densidad de corriente es uniforme. Halle la expresión que da el flujo magnético en un punto P, situado en el plano de la cinta y a una distancia del borde muy próximo a la misma. (Fig. 11-15.)

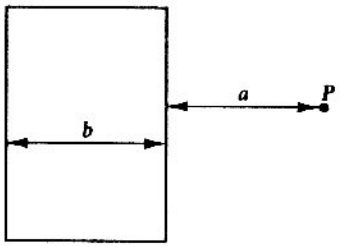


Figura 11-15

Solución. La densidad de la corriente es $J = I/A$. La intensidad de la corriente que circula por un hilo conductor de la cinta será I/b, y la inducción magnética está dada por la ley de Biot-Savart:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2\left(\frac{I}{b}\right)\frac{dx}{x}$$

x varía de a hasta $a + b$; entonces la intensidad del flujo magnético en P es:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{b}\int_a^{a+b} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{b}\left[\ln x\right]_a^{a+b} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{b} \cdot \ln \frac{a+b}{a}$$

Problema 11-18 Dos espiras circulares de radio a se colocan en planos paralelos y la distancia de sus centros es a. Halle la inducción magnética en el punto P situado en el punto medio que une los centros de las espiras. Las corrientes en las espiras son iguales y del mismo sentido.

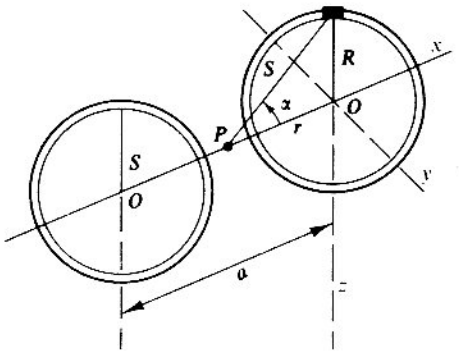


Figura 11-16

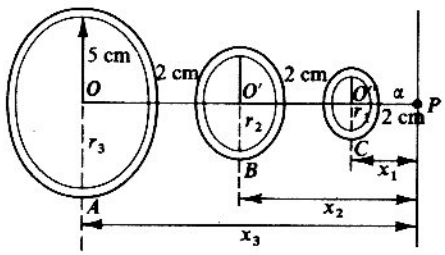


Figura 11-17

Solución. Según la Figura 11-16 tenemos que:

$$\text{sen } \alpha = R/S = \frac{R}{\sqrt{R^2 + r^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

La inducción magnética en el punto P producida por una de las dos espiras es:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{NIR \text{ sen } \alpha}{S^2} = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{NIa\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{\frac{5a^2}{4}} = \frac{4\sqrt{5}}{25} \cdot \frac{\mu_0 NI}{a}$$

Asimismo, el campo magnético creado en P por la otra espira tiene de inducción:

$$B_2 = \frac{4\sqrt{5}}{25} \cdot \frac{\mu_0 NI}{a}$$

Como circula la misma corriente por las dos espiras en el mismo sentido, se tiene que el campo magnético en P es:

$$B_1 + B_2 = 2B_1 = B = \frac{8\sqrt{5}}{25} \cdot \frac{\mu_0 NI}{a} \text{ porque } B_1 = B_2$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halle la inducción magnética en el punto P de la Figura 11-17, creada por las tres espiras circulares dispuestas como lo indica la figura y que transportan una corriente de 10 amperios y el radio de la espira mayor es 5 centímetros.
2. Un alambre de 0,5 m de longitud que transporta una corriente de 5 A forma un ángulo de 60° con un campo magnético de densidad de flujo 2 wb/m^2. Calcular la magnitud y dirección de la fuerza que obra sobre el alambre.
3. Una bobina plana de 100 espiras de 5 cm de radio transporta una corriente de 4 A. Calcular la densidad de flujo magnético en puntos de su eje situados a: 0 cm, 5 cm, 10 cm, 15 cm, 20 cm, de su centro.
4. Un solenoide de 40 cm de longitud y radio 4 cm de radio está formado por 400 vueltas de alambre y transporta una corriente de 10 A. Calcular la densidad de flujo magnético en puntos de su eje situados a: 0, 10, 20, 30, 40 cm del centro de una cara.

Si quiere saber más (ondas electromagnéticas en o através de la materia)

$\Rightarrow \frac{E_m}{B} = c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c_0}{\sqrt{K_E K_m}}$ $\quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

$K_E = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$; $K_m = \frac{\mu}{\mu_0}$

CAPITULO 12

Ondas electromagnéticas en el vacío (μ_0, ϵ_0, c)

Ondas longitudinales y transversales. Una onda es transversal cuando la vibración es perpendicular a la dirección de propagación de la onda de energía.

Será longitudinal cuando la vibración es paralela a la dirección de propagación.

Ondas electromagnéticas planas. Las ondas electromagnéticas corresponden al caso de la propagación de dos campos, el eléctrico y el magnético. El campo eléctrico **E** y el magnético **B** siempre son perpendiculares entre sí. Estas ondas se propagan en el vacío con una velocidad:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/seg}$$

$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 K_E \mu_0 K_m}}$

Si tomamos como dirección de propagación el eje X:

$$E = E(x - ct) \qquad B = B(x - ct)$$

En el caso más sencillo, ondas armónicas, que serán polarizadas linealmente, tendrán como frecuencia $f = \omega/2\pi$ y de longitud de onda $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, siendo $k = \omega/c$ (u $\omega = kc$). O sea:

$f\lambda = c$

$\omega = 2\pi f$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$E = E_{\text{máx}} \operatorname{sen} k(x - ct) = E_{\text{máx}} \operatorname{sen} (kx - \omega t)$$
$$B = B_{\text{máx}} \operatorname{sen} k(x - ct) = B_{\text{máx}} \operatorname{sen} (kx - \omega t)$$

Indudablemente esto es lo mismo que:

$$E = E_{\text{máx}} \operatorname{sen} (\omega t - kx) \quad \text{ya que} \quad k = \frac{\omega}{c}, \frac{x}{c} = t$$

y también es lo mismo que:

$$E = E_{\text{máx}} \operatorname{sen} \left[2\pi f \left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \quad \text{ya que} \quad f = \frac{1}{T} \quad \text{y} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Por tanto, se tienen estas tres componentes para cada campo:

$$E_x = 0 \qquad E_y = E_{\text{máx}} \operatorname{sen} (kx - \omega t) \qquad E_z = 0$$
$$B_x = 0 \qquad B_y = 0 \qquad B_z = B_{\text{máx}} \operatorname{sen} (kx - \omega t)$$

O sea, las ondas electromagnéticas planas son transversales con los campos **E** y **B** perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación de las ondas.

Como $\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$

$\Rightarrow E_1 k = B\omega$

$\Rightarrow \frac{E}{B} = \frac{\omega}{k} = \frac{E_M}{B_M} = c$

Como $-\frac{\partial B}{\partial x} = \mu\epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$

$\Rightarrow -Bk = -\mu\epsilon E\omega$

$\rightarrow \frac{E}{B} \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\mu\epsilon}$

$\Rightarrow c \cdot c = \frac{1}{\mu\epsilon} = c^2$

→ Los campos E y M (magnetización) se encuentran o se propagan en fase

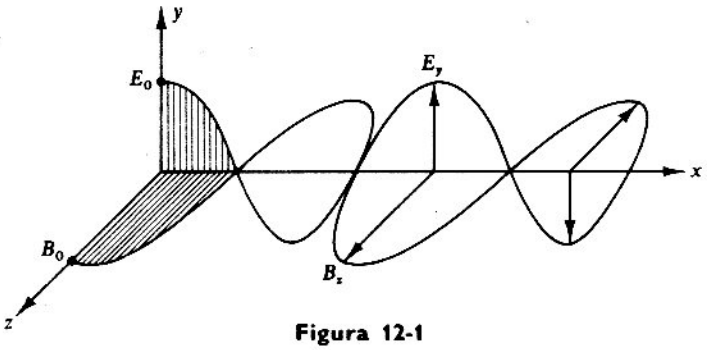


Figura 12-1

Energía del campo magnético. Si se tiene un circuito con una R y una L, se sabe que para mantener la corriente en él se debe suministrar energía. La energía necesaria por unidad de tiempo es VI, pero:

$$V = RI + L\frac{dI}{dt} \Rightarrow VI = RI^2 + LI\frac{dI}{dt}$$

siendo $LI\dfrac{dI}{dt}$ la energía necesaria por unidad de tiempo para establecer la corriente o su campo magnético asociado. Luego la rapidez de aumento de energía magnética será:

$$\frac{dW_m}{dt} = LI\frac{dI}{dt}$$

La energía magnética necesaria para aumentar una corriente desde cero hasta el valor I es entonces:

$$W_m = \int_0^{W_m} dW_m = \int_0^I LI\,dI = \frac{1}{2}LI^2$$

La densidad de energía asociada con el campo eléctrico de una onda electromagnética es:

$$w_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Como $E = cB$ o $B = \dfrac{1}{c}E$ y $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$, teniendo en cuenta que la densidad de energía magnética es: $w_B = \dfrac{1}{2\mu_0}B^2$ queda:

$$w_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{1}{2\mu_0 c^2}E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

o sea:

$$w_B = w_E \Rightarrow w = w_E + w_B = \varepsilon_0 E^2$$

densidad de energía electromagnética

Vector de Poynting. La propagación de campos eléctricos y magnéticos en el espacio lleva consigo una transmisión de energía, ya que dichos campos llevan asociada una energía almacenada.

El vector que determina esta propagación de energía es el vector de Poynting, **S**, y representa la velocidad de flujo de la energía a través de la unidad de área situada perpendicularmente a la dirección de propagación.

$$\mathbf{S} = \left[\frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B}\right] = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$$

$$\bar{S} = \frac{1}{2\mu_0}E_0 B_0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{E} = \dfrac{E_0}{\sqrt{2}} \\ \bar{B} = \dfrac{B_0}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Las unidades de **S** serán:

julios/segundo · metro cuadrado = vatio/metro cuadrado

Potencia: (es de) $P_i = P = \bar{S}\,4\pi r^2$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 12-1 Cuando se cierra el interruptor S de la Figura 12-2, la corriente estacionaria en la batería es de 20 amperios. *a*) Explique cómo se originan oscilaciones en el circuito L-C cuando se abre el interruptor. *b*) ¿Cuál es la frecuencia de las oscilaciones?

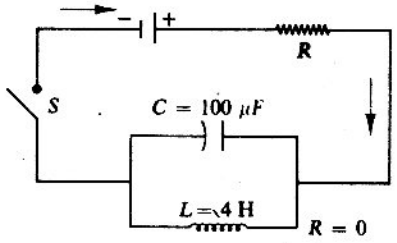


Figura 12-2

Solución. *a*) Si el circuito se abre mediante el interruptor S, entonces el circuito (L-C) comenzará a oscilar debido a la variación de la intensidad de la corriente por la respectiva variación de la frecuencia. En el circuito se originan oscilaciones eléctricas debido a un intercambio de energía entre el campo eléctrico del condensador y el campo magnético de la autoinducción.

b) La frecuencia de las oscilaciones eléctricas, llamada frecuencia natural por estar el circuito en resonancia ($X_L = X_C$), está dada por la relación:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{4 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6}}} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2 \cdot 10^{-2}}\right) = \frac{10^2}{4\pi} = 7{,}9 \text{ ciclos/seg}$$

Problema 12-2 ¿Cuál es la frecuencia de las ondas electromagnéticas (en el vacío) que tienen las siguientes longitudes de onda: 10^{-8} centímetros (rayos X); $5 \cdot 10^{-5}$ centímetros (luz amarilla); 10 centímetros (ondas ultracortas); 300 metros (ondas de radio).

Solución. De la relación $c = f\lambda$ se obtiene que la frecuencia para los rayos X es:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{10^{-8}} = 3 \cdot 10^{18} \text{ ciclos/seg}$$

Para las ondas electromagnéticas de la luz amarilla cuya longitud de onda es $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ cm su frecuencia está dada por:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{5 \cdot 10^{-5}} = 6 \cdot 10^{14} \text{ ciclos/seg}$$

Para las ondas electromagnéticas de $\lambda = 10$ cm:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{10} = 3 \cdot 10^{9} \text{ ciclos/seg}$$

Por último, para las ondas de radio:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^{4}} = 10^{6} \text{ ciclos/seg}$$

Problema 12-3 Una onda está representada por la ecuación $y = y_0 \operatorname{sen}(60t + 4{,}2x)$. ¿Qué propiedades de la onda se pueden hallar a partir de esta representación?

Solución. Comparándola con la expresión $E_y = -E_0 \operatorname{sen}\left[2\pi f\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$ vemos que $2\pi f = 60$ y, por tanto, la frecuencia de la onda es $30/\pi$ Hz. Análogamente, $-0{,}07 = 1/v$ y, por tanto, la velocidad de la onda es de $-14{,}3$ m/seg. El signo menos indica que la onda viaja en la dirección negativa del eje X. La dirección de su movimiento se infiere del hecho de que para un punto sobre la onda: $60t + 4{,}2x = \text{cte}$; si t aumenta, x decrece.

Problema 12-4 ¿A qué es igual la relación que existe entre la energía del campo magnético de un circuito oscilante y la energía de su campo eléctrico en el momento en que el tiempo es igual a $T/8$?

Solución. Tenemos que $U = U_0 \cos \omega t$ e $I = C\frac{dU}{dt} = -CU_0\,\omega \operatorname{sen} \omega t$. Por consiguiente,

$$W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} LC^2U_0^2\omega^2 \operatorname{sen}^2 \omega t,\ W_e = \frac{CU^2}{2} = \frac{1}{2} CU_0^2 \cos^2 \omega t$$

de donde:

$$\frac{W_m}{W_e} = \frac{LC\omega^2 \operatorname{sen}^2 \omega t}{\cos^2 \omega t} = LC\omega^2 \operatorname{tg}^2 \omega t$$

Cuando $t = T/8$, $\operatorname{sen} \omega t = \sqrt{2}/2$ y $\cos \omega t = \sqrt{2}/2$. Además, como $LC = \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{1}{\omega^2}$, en definitiva tenemos que:

$$\frac{W_m}{W_e} = \frac{\operatorname{sen}^2 \omega t}{\cos^2 \omega t} = 1$$

Problema 12-5 Un circuito oscilante está formado por un condensador de 0,2 microfaradios de capacidad y de una bobina cuya inductancia es igual a $5{,}07 \cdot 10^{-3}$ henrios. *a*) ¿Con qué decremento logarítmico de amortiguamiento se hará tres veces menor en 10^{-3} segundos la diferencia de potencial entre las placas del condensador? *b*) ¿Cuál será en estas condiciones la resistencia del circuito?

Solución. *a*) Suponiendo que la resistencia eficaz es suficientemente pequeña, hallamos el periodo de la vibración por la fórmula:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi 10^{-4} \text{ seg}$$

Después tenemos que:

$$U_1 = U_0 e^{-\frac{\alpha t}{T}},\quad \text{de donde}\quad \frac{xt}{T} = \ln \frac{U_0}{U_1}$$

Por las condiciones del problema, cuando $t = 10^{-3}$ seg la relación $U_0/U_1 = 3$. Por consiguiente,

$$x = \frac{T \ln \frac{U_0}{U_1}}{t} = \frac{(\ln 3) \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{10^{-3}} = 0{,}22$$

b) $R = 11{,}1\ \Omega$. Es fácil comprender que este valor de R cumple la condición de utilidad de la fórmula $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Problema 12-6 La constante solar, que es la potencia producida por la radiación del Sol y que cae sobre la atmósfera de la Tierra, es 1,35 kilovatio por metro. ¿Cuáles son las magnitudes de **E** y **B** para las ondas electromagnéticas emitidas por el Sol en la Tierra y en el Sol?

Solución. Considere las ondas electromagnéticas en la Tierra. El vector $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ da la energía de flujo a través de cualquier sección del campo por unidad de área por unidad de tiempo. Así:

$$\left|\frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B}\right| = EH = 1{,}35 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$$

Por tanto,

$$E\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,E = 1{,}35 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$$

porque para el campo electromagnético en el vacío $\varepsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2$. Ahora, $E^2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,(1{,}35 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2) =$ $= 377\ \Omega \cdot (1{,}35)\,10^3 \text{ W/m}^2$.

$$\therefore\ E = \sqrt{5{,}09 \cdot 10^5} \text{ V/m} = 0{,}71 \cdot 10^3 \text{ V/m}$$

Análogamente,

$$1{,}35 \cdot 10 \text{ W/m}^2 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\ H^2 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\,\frac{B^2}{\mu_0}$$

$$\therefore\ B^2 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \cdot (1{,}35) \cdot 10^3 \text{ W/m}^2}{3 \cdot 10^8 \text{ m/seg}} \qquad \therefore\ B = 2{,}36 \cdot 10^{-6} \text{ wb/m}^2$$

La energía que cae sobre un metro cuadrado de la atmósfera de la Tierra ha pasado por un área menor en el Sol. Las áreas están relacionadas por $A/1\text{ m}^2 = r^2/R^2$, siendo r el radio del Sol y R la distancia de la Tierra al Sol. La densidad de energía en la superficie del Sol es mayor que en la superficie de la Tierra y están en la relación R^2/r^2. Por tanto, los valores de E^2 y B^2 son mayores en el Sol que en la Tierra. Entonces en la superficie del Sol:

$$E = 0{,}71 \cdot 10^3\,\frac{R}{r} \text{ V/m} = 0{,}71 \cdot 10^3\,\frac{1{,}5 \cdot 10^8}{7 \cdot 10^5} \text{ V/m} = 1{,}52 \cdot 10^5 \text{ V/m}$$

y

$$B = 2{,}36 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1{,}5 \cdot 10^8}{7 \cdot 10^5} \text{ wb/m}^2 = 5{,}06 \cdot 10^{-4} \text{ wb/m}^2$$

CAPITULO 13

Naturaleza de la luz

Teorías. Hacia 1656 dio a conocer Huyghens la primera teoría científica acerca de la naturaleza de la luz, consistente en considerar la luz como un movimiento ondulatorio longitudinal que se propaga en un medio universalmente extendido: el éter.

Newton da a conocer en 1704 la teoría de que la luz está constituida por corpúsculos luminosos que, partiendo de los cuerpos, se propagaban en línea recta.

Estas dos teorías explican fenómenos tales como la reflexión, la refracción y la propagación rectilínea, aunque para explicar la segunda era preciso considerar que la luz se propaga a mayor velocidad en los medios menos refringentes (de menor índice de refracción).

El descubrimiento de la difracción por Grimaldi en 1665 y las interferencias por Young en 1802 invalidan la teoría corpuscular. Fresnell perfecciona la teoría ondulatoria creando la *teoría ondulatoria transversal*, que hizo necesaria la existencia de un éter sólido que presentó grandes dificultades de concepción.

En 1845 Faraday descubre que los campos magnéticos desvían el plano de polarización y prevé el carácter electromagnético de la luz.

Posteriores descubrimientos (efecto Zeeman, efecto Stark, etc.) conducen a Maxwell a publicar en 1873 su teoría sobre la naturaleza electromagnética de la luz.

El descubrimiento de las ondas electromagnéticas por Hertz confirma la teoría de Maxwell.

Más tarde, la aparición de fenómenos, como el efecto Compton, efecto Raman, etc., inexplicables dentro de la concepción electromagnética, dan paso a nuevas teorías que cristalizan en la *mecánica ondulatoria*, toda una disciplina en cuyo desarrollo han participado las ideas de Planck, Einstein, Heisemberg, Dirac y Schrödinger, pero que se fundamenta en una concepción genial debida a De Broglie sobre la asociación de corpúsculos y ondas.

Propagación de la luz. La luz se propaga en línea recta. En el vacío y en el aire con velocidad $c \approx 300\,000$ kilómetros por segundo, en otros medios la velocidad viene dada por la fórmula:

$$V_{\text{medio}} = c \cdot \frac{1}{n} \qquad (13\text{-}1)$$

siendo n el índice de refracción propio del medio.

Flujo luminoso. La energía radiante emitida por un foco luminoso en la unidad de tiempo recibe el nombre de *flujo luminoso*.

La unidad de flujo luminoso es el *lumen*, que se define como el flujo luminoso procedente de un sesentavo de centímetro cuadrado de abertura de un foco luminoso patrón, comprendido dentro de un ángulo sólido de un estereorradián.

Iluminación. Considerando un punto de superficie dS sobre el que incide un flujo luminoso dF, se define la *iluminación* E en dicho punto:

$$E = \frac{dF}{dS}$$

La iluminación es, pues, el flujo luminoso recibido por la unidad de área. Se expresa en lúmenes por metro cuadrado.

Intensidad luminosa. El flujo luminoso emitido por unidad de ángulo sólido es la intensidad luminosa I:

$$I = \frac{dF}{d\omega}$$

La unidad de intensidad es el lumen por estereorradián.

Ya que el ángulo de radiación es 4π estereorradianes, el flujo luminoso total F correspondiente a una intensidad I es:

$$F = 4\pi I \tag{13-2}$$

Téngase en cuenta que:

$$1 \text{ estereorradián} = \frac{1 \text{ candela}}{1 \text{ lumen}}$$

Iluminancia. El flujo luminoso que incide sobre una superficie, por unidad de área, se denomina *iluminancia* E.

$$E = \frac{F}{S} \tag{13-3}$$

La unidad de iluminancia es el *lux* (lx), que equivale al lumen por metro cuadrado.

Si la fuente luminosa puntual está en el centro de una esfera de radio R, sobre la superficie esférica incide un flujo $F = 4\pi I$ y la iluminancia valdría:

$$E = \frac{4\pi I}{4\pi R^2} = \frac{I}{R^2} \tag{13-4}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 13-1 *a*) Describa el método de Michelson para hallar la velocidad de la luz. *b*) Si la velocidad de la luz calculada con el aparato de Michelson es de 299 821 kilómetros y si la rueda gira a 530 revoluciones por segundo, ¿a qué distancia estaba el espejo reflector de la rueda que gira?

Solución. *a*) El aparato consiste en una fuente luminosa que emite destellos, una rueda en forma de espejo octagonal y un colector sensitivo para recoger el rayo reflectado.

La Figura 13-1(a) muestra la posición cuando la luz se refleja en la cara 3, continúa al espejo M, regresa a la cara 1 y sigue al telescopio T. A medida que la rueda comienza a rotar, el rayo reflejado toma las posiciones que indica la Figura (b), (c), (d), (e) y todas las posiciones intermedias. A medida que el espejo gira más rápidamente, la cara 2 ocupa la posición de la cara 1, y el rayo reflejado de nuevo llega a T.

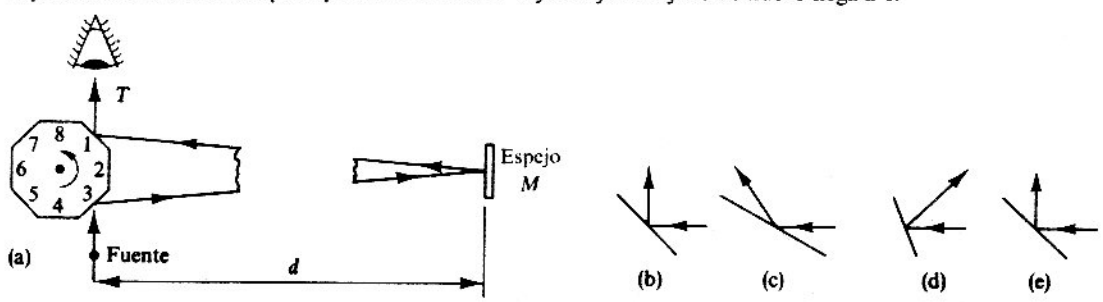


Figura 13-1

Como emplea un octavo de una revolución de la rueda para que la luz recorra la distancia d, el tiempo en segundos es:

$$t = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{N} = 1/8\,N$$

Entonces:

$$c = e/t = \frac{2d}{(1/8\,N)} = 16\,N \cdot d$$

b) Como $d = c/16\,N = \dfrac{299\,821}{16\,530} = 35{,}1$ km.

Problema 13-2 Las medidas de la velocidad de la luz calculadas por Fizeau las continuó Cornu, con el mismo aparato, aumentando la distancia de los espejos hasta 22,9 kilómetros. Una de las ruedas dentadas tenía 40 milímetros de diámetro y 180 dientes. Calcule la velocidad angular que necesitaba para que la luz transmitida a través de una abertura volviese por la siguiente.

Solución. La distancia entre diente y diente era:

$$d = 126/180 = 0{,}7 \text{ mm} \text{ y } c = 2{,}99773 \cdot 10^8 \text{ m/seg}$$

El espacio recorrido por la luz es:

$$e = 2d = 2 \cdot 22{,}9 \cdot 10^8 \text{ m} = 4{,}58 \cdot 10^4 \text{ m}$$

El tiempo que emplea la luz en recorrer este espacio es:

$$T = e/c = \frac{4{,}58 \cdot 10^4}{2{,}99773 \cdot 10^8} \text{ seg} = 1{,}538 \cdot 10^{-4} \text{ seg}$$

El espacio angular entre los dientes es:

$$\theta = \frac{2\pi}{180} = \frac{\pi}{90} \text{ rad}$$

La velocidad angular a la cual debía girar la rueda es:

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{\pi/90}{1{,}538 \cdot 10^{-4}} = \frac{\pi \cdot 10^4}{90(1{,}538)} = 227 \text{ rad/seg}$$

Problema 13-3 La frecuencia de una onda de luz es de $6{,}29 \cdot 10^{14}$ ciclos por segundo. ¿Cuál es la longitud de onda, en metros, micrones, milimicrones y angstroms?

Solución. Velocidad = frecuencia · longitud de onda.

$$\text{Longitud de onda} = \frac{\text{velocidad}}{\text{frecuencia}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/seg}}{6{,}29 \cdot 10^{14} \text{ ciclos/seg}} = 0{,}477 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Esta longitud de onda en micrones es:

$$\text{Longitud de onda} = 0{,}477 \cdot 10^{-6} \text{ m} \frac{1\,\mu}{10^{-6} \text{ m}} = 0{,}477\,\mu = 0{,}477\,\mu$$

Como un milimicrón es igual a 10^{-9} m, la longitud de onda es igual a 477 milimicrones
Como un angstrom es igual a 10^{-10} m, la longitud de onda es igual a 4770 angstroms.

Iluminación

Problema 13-4 ¿Cuál es la iluminación a 2 metros de una fuente de luz que tiene una potencia de 50 candelas?

Solución. Iluminación $= I/r^2 = 50$ candelas/$(2\text{ m})^2 = 50$ candelas/4 m^2. Entonces la iluminación es igual a 12,5 candelas/m^2.

Problema 13-5 Cuando un libro se sostiene a 1 metro de una lámpara, la iluminación es de 10 candelas por metro cuadrado. ¿Cuál es la iluminación cuando se sostiene a 2 metros de la misma lámpara?

Solución. Iluminación $= I/r^2$. La iluminación en las posiciones 1 y 2 están dadas por I/r_1^2 e I/r_2^2. Entonces: $I =$ iluminación$_1 \cdot r_1^2$, $I =$ iluminación$_2 \cdot r_2^2$, de donde: iluminación$_1 \cdot r_1^2 =$ iluminación$_2 \cdot r_2^2$. Por consiguiente,

$$\text{iluminación} = \frac{10\text{ candelas/m}^2 \cdot 1\text{ m}^2}{4\text{ m}^2} = 2{,}5\text{ candelas/m}^2$$

Problema 13-6 Una lámpara de 100 vatios tiene una eficiencia lumínica de 1,5 candelas por vatio. ¿A qué altura sobre una mesa se debe colocar la lámpara para que produzca una iluminación de 6 candelas por metro cuadrado?

Solución. Como la eficiencia de la lámpara es de 1,5 candelas/W y la lámpara es de 100 W, la intensidad de la lámpara es:

$$(1{,}5\text{ candelas/W}) \cdot (100\text{ W}) = 150\text{ candelas}$$

Entonces, como iluminación $= I/r^2$, se obtiene que:

$$r^2 = \frac{150\text{ candelas}}{6\text{ lúmenes/m}} = 25\text{ m}^2 \quad \therefore r = 5\text{ m}$$

Es decir, la lámpara se debe colocar a 5 m por encima de la superficie de la mesa.

Problema 13-7 *a*) Halle el número de lúmenes producido por una luz si su longitud de onda es de 625 milimicrones cuando el flujo radiante es de 1 vatio. *b*) ¿Cuántos vatios son necesarios para que la luz produzca 80 lúmenes si la longitud de onda de la luz es de 555 milimicrones?

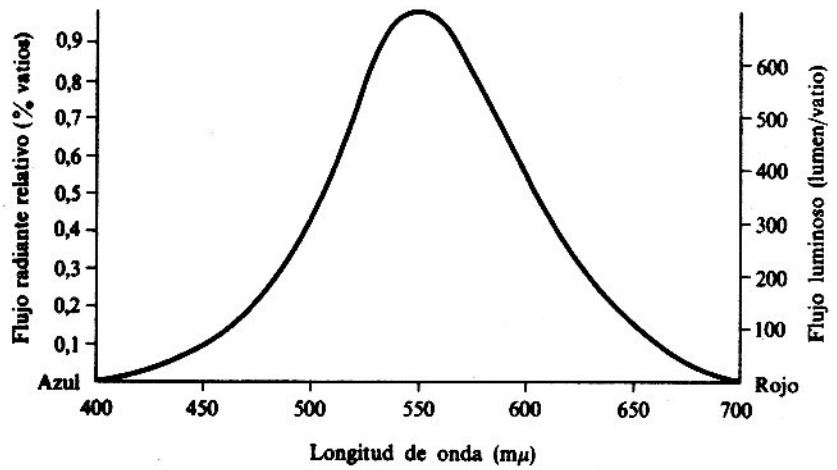


Figura 13-2

Solución. *a*) La Figura 13-2 muestra que 1 W de flujo radiante produce únicamente el 28 % de los lúmenes producidos por la luz de longitud de onda de 555 mμ. Entonces: 685 · 28 % = 191,8 lúmenes/W.

b) El flujo radiante que se necesita para producir 80 lúmenes de 625 mμ es 80/191,8 = 0,41 W.

El flujo radiante pedido para los 80 lúmenes de 555 mμ es 80/685 = 0,117 W.

La diferencia de vatios es 0,417 − 0,117 = 0,3 W. La eficiencia lumínica es la relación entre los lúmenes producidos divididos por los vatios radiados.

Problema 13-8 Una lámpara de 100 vatios produce una intensidad luminosa de 120 candelas. *a*) ¿Cuál es el flujo total radiado por la lámpara? *b*) ¿Cuál es la eficiencia lumínica de la lámpara?

Solución. *a*) El flujo radiado es $F = 4\pi I = 4\pi 120 = 1507{,}2$ lúmenes.

b) La eficiencia lumínica = flujo luminoso/flujo radiante = 1507,2/100 = 15,07 lúmenes/W.

Problema 13-9 Halle la luminancia de una superficie cuando la fuente luminosa no es perpendicular a la superficie.

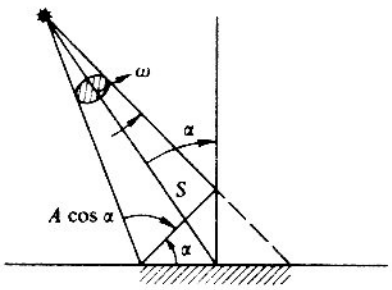


Figura 13-3

Solución. La luminancia es $E = F/A$.

En la Figura 13-3 el ángulo sólido subtendido por la fuente y el área A es:

$$\omega = A \cos \alpha / S^2 \text{ y } F = I\omega$$

En el caso general el flujo total radiado es $F = IA \cos \alpha / S^2$. Entonces la iluminación es:

$$E = F/A = IA \cos \alpha / S^2 \, A = I \cos \alpha / S^2$$

Problema 13-10 Una lámpara de intensidad luminosa de 40 candelas está a 2,4 metros de una mesa circular de radio 45 cm y perpendicular a los rayos de luz. Halle: *a*) el ángulo sólido subtendido por la mesa; *b*) el flujo que cae sobre la mesa; *c*) iluminación sobre la mesa; *d*) el flujo total emitido por la fuente; *e*) si la eficiencia es de 15 lúmenes por vatio, ¿cuál es la potencia necesaria para que funcione la lámpara?; *f*) si la fuente se ha movido de manera que forma un ángulo de 45° con la normal a la mesa, halle la iluminación sobre la mesa.

Solución. $I = 40$ candelas; $\alpha = 0°$; $S = 2{,}4$ m; $r = 0{,}45$ m; eficiencia = 15 lúmenes/W.

a) El ángulo sólido es:

$$\omega = \frac{A \cos \alpha}{S^2} = \frac{\pi r^2 \cos 0°}{S^2} = \frac{\pi \cdot (0{,}45)^2 \cdot 1}{2.4^2} = 0{,}11 \text{ estereorradianes}$$

b) Flujo sobre la mesa: $F = I\omega = 40(0{,}11) = 4{,}41$ lúmenes.
c) Iluminación sobre la mesa: $E = I/S^2 = 40/2{,}4^2 = 6{,}94$ lúmenes/m^2.
d) Flujo total emitido por la fuente: $F = 4\pi I = 4\pi 40 = 502{,}4$ lúmenes.
e) Potencia consumida: $502{,}4/15 = 33{,}5$ W.
f) Iluminación de la mesa a 45°: $E = (I/S^2)(\cos\alpha) = 6{,}94(0{,}707) = 4{,}8$ lúmenes/m^2.

Problema 13-11

El filamento de una lámpara de 1000 candelas de intensidad luminosa se encuentra dentro de un globo esférico deslustrado de 20 centímetros de diámetro. Halle: *a*) el flujo luminoso que emite este foco de luz; *b*) su emitancia luminosa y su luminancia; *c*) la iluminancia, la emitancia luminosa y la luminancia de una pantalla sobre la que incide el 10 por 100 del flujo luminoso emitido por el filamento. El coeficiente de reflexión de la luz en la superficie de la pantalla es: $\rho = 0{,}8$. El área de la pantalla es 0,25 m^2 y difunde la luz de acuerdo con la ley de Lambert.

Solución. *a*) El flujo luminoso F que emite un foco de luz en todas direcciones se relaciona con la intensidad I de la luz emitida por él por la fórmula $F = 4\pi I = 4\pi 10^3$ candelas $= 1{,}26 \cdot 10^4$ lúmenes.

b) La emitancia luminosa de un foco es $E = F/S = 4\pi I/4\pi r^2 = I/r^2$, siendo r el radio del globo. Entonces, $R = 1000/(0{,}1)^2 = 10$ lúmenes/m^2.

La luminancia del foco luminoso está dada por $B = I/\Delta S'$, siendo $\Delta S'$ el área visible de la superficie que emite luz. En este caso, $\Delta S' = \pi r^2$; por tanto,

$$B = I/\pi r^2 = 1000/\pi(0{,}1)^2 = 3{,}18 \cdot 10^4 \text{ candelas/m}^2$$

c) Sobre la pantalla incide un flujo luminoso $F_1 = 0{,}1F = 1{,}26 \cdot 10^3$ lúmenes. Por consiguiente, la iluminancia de la pantalla es:

$$E = F_1/S_1 = 1{,}26 \cdot 10^3/0{,}25 \text{ lúmenes/m}^2 = 5 \cdot 10^3 \text{ lux}$$

La emitancia luminosa de la pantalla es:

$$R = \rho(F_1/S_1) = \rho E = 0{,}8 \cdot 5 \cdot 10^3 \text{ lúmenes/m}^2 = 4 \cdot 10^3 \text{ lúmenes/m}^2$$

La luminancia de la pantalla: $B = R/\pi = 1{,}3 \cdot 10^3$ candelas.

Problema 13-12

a) Si la fuente luminosa no es puntual, sino extendida, como un tubo fluorescente, superficie reflectora, etc., halle la intensidad I, la iluminancia E y la luminancia B. *b*) Si un disco de 1 metro de diámetro para difundir la luz tiene una luminancia de 10 000 candelas por metro cuadrado, ¿cuál es la iluminancia a lo largo del eje normal al disco en un punto situado a 2,5 metros por debajo del disco?

Solución. *a*) Según la Figura 13-4, $I = BA\cos\alpha$, y remplazando en $E = I/S^2$ con $S^2 = r^2 + d^2$, se obtiene:

$$E = \frac{I}{S^2} = \frac{BA\cos\alpha}{r^2 + d^2} = \frac{BA\cos\alpha}{S^2}$$

Resolviendo esta última ecuación para B se obtiene:

$$B = \frac{E(r^2 + d^2)}{A\cos\alpha} = \frac{ES^2}{A\cos\alpha}$$

Nota. A grandes distancias de la fuente, si α se aproxima a cero, $\cos\alpha$ se aproxima a 1. En el caso de que sea 0°, $r = 0$ y $d = s$ y A una fuente puntual, entonces las ecuaciones anteriores se reducen a:

$$B = ES^2/A \quad \text{y como} \quad BA = I, \quad E = I/S^2$$

b) La distancia S es:

$$S = \sqrt{r^2 + d^2} = \sqrt{0{,}5^2 + 2{,}5^2} = 2{,}55 \text{ m}$$

$$\cos \alpha = 2{,}5/2{,}55 = 0{,}9807$$

La iluminancia desde el disco al punto P es:

$$E = \frac{BA \cos \alpha}{S^2} = \frac{10^4 \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 0{,}9087}{6{,}5} = 0{,}118 \text{ lúmenes/m}^2$$

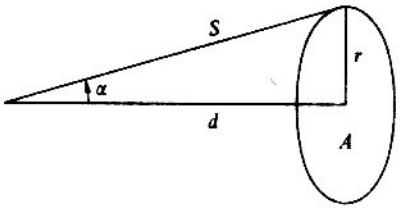


Figura 13-4

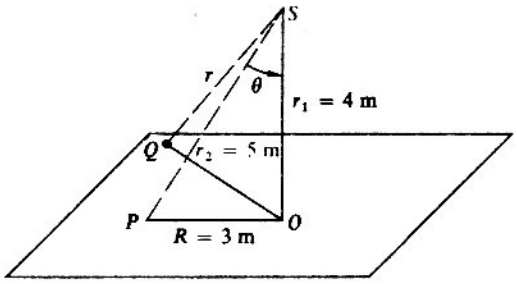


Figura 13-5

Problema 13-13 Una luz uniforme está suspendida a 4 metros por encima de una superficie. La iluminación de la superficie en el punto que se encuentra sobre la vertical es de 100 lúmenes por metro cuadrado. *a*) ¿Cuál es la iluminación en el punto situado a 3 metros del primero? *b*) ¿En qué punto sobre la superficie es la iluminación de 20 lúmenes por metro cuadrado? (Fig. 13-5.)

Solución. *a*) Para el punto P situado sobre la superficie se tiene que $E_P = I \cos \theta / r_2^2$.

La intensidad I en el punto O está dada por la relación $E_0 = I \cos \theta / r_1^2 = I/r_1^2$, porque $\theta = 0°$ y $\cos \theta = 1$. Entonces:

$$I = r_1^2 E_0 = 16 \cdot 100 = 1600 \text{ bujías}$$

Para el punto P:

$$E_P = I \cos \theta / r_2^2 = \frac{1600(4/5)}{25} = 51{,}2 \text{ lúmenes/m}^2$$

b) Si la iluminación en un punto determinado es de 20 lúmenes/m^2 se tiene que:

$$\frac{I \cos \theta}{r^2} = \frac{I \cdot r_1/r}{r^2} = \frac{I r_1}{r^3} = \frac{1600 \cdot 4}{r^3}$$

de donde:

$$r^3 = \frac{1600 \cdot 4}{20} = 320 \quad \therefore r = 6{,}83 \text{ m}$$

En el triángulo OSQ se obtiene $R'^2 + r_1^2 = r^2$, de donde $R' = \sqrt{30{,}92} = 5{,}56$ m.

Problema 13-14 El rendimiento luminoso total de una lámpara es de 50 lúmenes por vatio. Si la lámpara se encuentra a una altura de 10 metros, ¿qué potencia se debe suministrar para producir una iluminación igual a la de 0,2 lúmenes por metro cuadrado en un punto situado sobre la vertical? *b*) ¿Cuál es la iluminación en un punto situado a una distancia igual al doble de la altura a que está la lámpara y al mismo nivel del primero?

Solución. *a)* $I = E \cdot r^2 = 100 \cdot (0{,}2) = 20$ bujías.

El ángulo sólido es $\omega = 4\pi$ estereorradianes; entonces el flujo luminoso es:

$$F = I\omega = 20 \cdot 4 \cdot \pi = 251{,}2 \text{ lúmenes}$$

De la relación $R = F_L/F_R$ se obtiene:

$$F_R = F_L/R = \frac{251{,}2}{50} = 5 \text{ W}$$

b) Como el otro punto está situado a 20 m del primero, la iluminación en este punto es:

$$E = I \cos \theta / r^2, \text{ con } r = \sqrt{10^2 + 20^2} = 22{,}3 \text{ m y } \cos \theta = \frac{10}{22{,}3}$$

Entonces:

$$E = \frac{20 \cdot \left(\frac{10}{22{,}3}\right)}{(22{,}3)^2} = \frac{200}{(22{,}3)^3} = 0{,}018 \text{ lúmenes/m}^2$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dos electrones avanzan en direcciones contrarias a una velocidad igual a la de la luz. Halle la velocidad relativa entre ellos.
2. Describa los fenómenos que son favorables a las ideas de Huyghens y a las de Newton sobre la naturaleza de la luz. También los fenómenos que satisfacen a ambas teorías.
3. ¿Qué indujo a Maxwell a identificar la luz con las ondas electromagnéticas?
4. Dos focos luminosos de 40 y 160 bujías están separados 6 metros, en qué puntos de la recta que los une la iluminación producida por ambos focos es igual.
5. Se ilumina una sala con tres lámparas iguales. El flujo total de cada una de ellas 10 000 lúmenes. La separación entre ellas es 4 m y se hallan a 3 m del suelo. Calcular la iluminación en puntos del suelo directamente debajo de cada una de ellas.
6. Una célula fotoeléctrica que controla un circuito, es accionada por luz que incide sobre ella a traves de una abertura de 2mm de radio. Para accionar el circuito debe incidir en la cédula un flujo mínimo de 0,4 lúmenes. ¿Cuál es la máxima distancia posible desde la abertura hasta un foco puntual de 80 bujías, para que el circuito funcione?

CAPITULO 14

Refracción y reflexión

Optica geométrica. La naturaleza ondulatoria de la luz hace válidas, para el estudio de los fenómenos de propagación, todas las leyes correspondientes al movimiento ondulatorio.

Refracción. Es el cambio de dirección que sufre un rayo de luz cuando cambia de medio de propagación.

Leyes de la refracción

1.ª El rayo incidente, la normal a la superficie de separación de los dos medios y el rayo refractado están en el mismo plano.

2.ª La relación entre las velocidades en los dos medios es igual a la que existe entre los senos del ángulo de incidencia y del ángulo de refracción. El cociente n o coeficiente de proporcionalidad recibe el nombre de *índice de refracción* del segundo medio respecto al primero (Ley de Snell).

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{n_2}{n_1} = n \qquad (14\text{-}1)$$

Dioptrio plano. Es toda superficie transparente y plana que separa dos medios de distinto índice de refracción.

Lámina de caras paralelas. Formada por dos dioptrios planos, el desplazamiento longitudinal aparente de un objeto observado a través de sus caras con un índice de refracción n y espesor e es:

$$\text{desplazamiento} = e\left(1 - \frac{1}{n}\right) \qquad (14\text{-}2)$$

Prisma óptico. Se denomina de este modo al sistema constituido por dos dioptrios planos que forman un ángulo diedro A (ángulo refringente) y que limitan, por tanto, dos medios de distinto índice de refracción (Fig. 14-1).

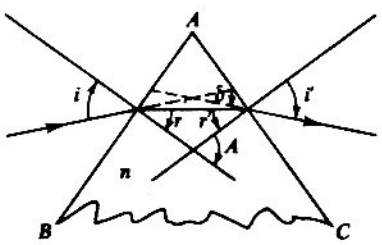


Figura 14-1

a) *Fórmula del prisma.* Un rayo de luz monocromática que incide sobre la cara AB se comportará, de acuerdo con las leyes de la refracción, de forma que podemos obtener:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} &= n \\ \frac{\operatorname{sen} r'}{\operatorname{sen} i'} &= \frac{1}{n} \end{aligned}\right\}$$

la desviación δ que sufre el rayo vale:

$$\delta = (i - r) + (i' - r') = i + i' - A$$

ahora, si los ángulos son pequeños pueden reemplazarse los senos de los ángulos por los ángulos y entonces:

$$i + i' - (r + r') = n(r + r') - (r + r') = (n - 1)A$$

$$\delta = (n - 1)A \tag{14-3}$$

b) *Desviación mínima.* Cuando el desplazamiento del rayo a través del prisma resulta simétrico respecto a él, es decir, cuando $i = i'$ y $r = r'$, la desviación δ toma valor mínimo δ_0:

$$\delta_0 = 2i - A; \quad i = \frac{\delta_0 + A}{2}$$

Pero $\operatorname{sen} i = n \operatorname{sen} r = n \cdot \operatorname{sen} \dfrac{A}{2}$

$$\operatorname{sen} \frac{\delta_0 + A}{2} = n \cdot \operatorname{sen} \frac{A}{2} \tag{14-4}$$

Dioptrio esférico. Una superficie esférica que separa dos medios transparentes de distinto índice de refracción recibe el nombre de dioptrio esférico o *dióptrico*. En su estudio práctico se utilizan las siguientes fórmulas:

a) Fórmula del dióptrico:

$$\frac{n_2}{s_2} - \frac{n_1}{s_1} = \frac{n_2 - n_1}{R} \tag{14-5}$$

en la cual n_1 y n_2 son los índices del primero y segundo medios. El valor s_1 es la distancia del objeto al dióptrico y el s_2 la distancia del dióptrico a la imagen. R es el radio del dióptrico.

b) Aumento:

$$\frac{y'}{y} = \frac{n_1 s_2}{n_2 s_1} \tag{14-6}$$

y' y y son, respectivamente, los tamaños de la imagen y del objeto.

c) Focos:

Foco de la imagen: $$f_2 = R \frac{n_2}{n_2 - n_1} \tag{14-7}$$

Foco del objeto: $$f_1 = -R \frac{n_1}{n_2 - n_1} \tag{14-8}$$

Leyes de la reflexión

1.ª El rayo incidente, el reflejado y la normal a la superficie reflectora están en el mismo plano.

2.ª El ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales.

Espejo plano. Produce una imagen simétrica respecto al objeto, virtual y del mismo tamaño que el objeto.

Espejos esféricos. Pueden ser *cóncavos* o *convexos*, según sea la superficie cóncava o convexa la que recibe el rayo. En los espejos cóncavos la imagen es real e invertida si el objeto se encuentra entre el infinito y el foco principal (Fig. 14-2). Es virtual, derecha y de mayor tamaño que el objeto cuando éste se encuentra entre el espejo y el foco principal.

Los espejos convexos producen imágenes virtuales derechas y menores que el objeto (vea la Figura 14-3).

a) Fórmula de los espejos:

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_1} = \frac{2}{R} \tag{14-9}$$

b) Aumento:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s_2}{s_1} \tag{14-10}$$

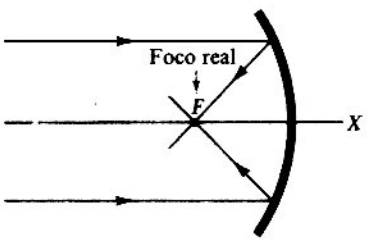


Figura 14-2

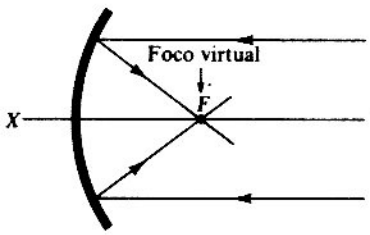


Figura 14-3

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 14-1 El índice de refracción del agua es 1,33. ¿Cuál es el ángulo crítico para el agua?

Solución. El índice de refracción del agua (n) es el cociente de la velocidad de la luz en el aire dividida por la velocidad de la luz en el agua. Como los rayos de luz salen del agua al aire, el índice de refracción es $1/n$. Además, $1/n = \text{sen } i/\text{sen } r = \text{sen } i/\text{sen } 90^\circ = \text{sen } i/1 = \text{sen } i$. Entonces

$$1/n = 1/1{,}33 = 0{,}75 = \text{sen } i \quad \therefore\ i = 48{,}6^\circ$$

que es el valor del ángulo crítico para el agua.

Problema 14-2 Sobre un vaso lleno de agua hay una lámina de vidrio. ¿Qué ángulo de incidencia deberá formar el rayo de luz que caiga sobre la lámina para que en la superficie de separación entre el vidrio y el agua se produzca la reflexión total? El índice de refracción del vidrio es 1,5.

Solución. Tenemos que $\text{sen } i/\text{sen } r = n$, donde n es el índice de refracción del vidrio. La reflexión total ocurrirá en la superficie de separación entre el agua y el vidrio si se cumple la condición según la cual $\text{sen } r = n_1/n_2$. En este caso, $\text{sen } i = n \text{ sen } r = n\,\frac{n_1}{n_2} = n = 1{,}33$, es decir, $\text{sen } i > 1$; por tanto, las condiciones del problema son irrealizables.

Problema 14-3 Una fuente de luz se coloca a 90 centímetros por debajo de la superficie de un recipiente de alcohol cuyo índice de refracción es 1,36. Emite rayos en todas las direcciones. Algunos tocan la superficie y se refractan al aire; otros se reflejan de nuevo al alcohol. Los rayos que pasan al aire forman un círculo luminoso sobre la superficie. Calcule el área del círculo luminoso. (Fig. 14-4.)

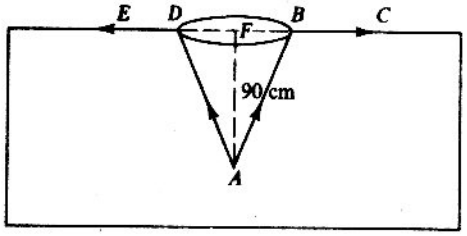


Figura 14-4

Solución. Sabemos que cualquier rayo que incida en la superficie, formando un ángulo menor que el ángulo crítico, se refracta en el aire, y los que forman un ángulo mayor que el ángulo crítico se reflejan en el alcohol. Los rayos AB y AD se refractan a lo largo de BC y DE (que están sobre el ángulo crítico). Cualquier rayo que toque la superficie entre D y B ilumina la superficie, y cualquier rayo que toque la superficie fuera del círculo determinado por B y D se refleja de nuevo en el líquido.

$$\text{El ángulo crítico} = 1/n = 1/1{,}36 = 0{,}7353 \quad \therefore\ \theta = 47{,}3^\circ$$

Para hallar el radio del círculo luminoso tenemos que $\text{tg} \sphericalangle BAF = FB/AF$. De donde $FB = AF \text{ tg } 47{,}3^\circ = 90 \cdot 1{,}084 = 0{,}9 \cdot 756$ m, que es el radio del círculo luminoso. Su área es: $\pi r^2 = 3{,}14(0{,}97)^2 = 2{,}95 \text{ m}^2$.

Problema 14-4 Una lámina de vidrio de 6 milímetros de espesor se coloca de tal manera que intercepta los rayos de luz de una fuente luminosa de 500 mμ de longitud de onda. Si la distancia que existe de la fuente a una pantalla es 4 centímetros, halle el número de ondas entre la fuente y la pantalla. El índice de refracción del vidrio es 1,5.

Solución. La longitud de las ondas en el vidrio es: $\lambda_v = \lambda_n = 750 \text{ m}\mu$

El número de ondas en el vidrio es: $d/\lambda_v = \dfrac{6 \text{ mm}}{750 \text{m}\mu} = 8000$ ondas

El número de ondas en el aire es: $d/\lambda = \dfrac{34 \text{ mm}}{500 \text{m}\mu} = 68\,000$ ondas

El número de ondas entre la fuente y la pantalla es: 86.000 ondas.

Problema 14-5 *a*) Halle la profundidad aparente a la que se encuentra un objeto sumergido en un líquido. *b*) Si un objeto está a 20 centímetros por debajo de la superficie de un lago, de índice de refracción 1,33, ¿a qué distancia por debajo de la superficie aparenta estar la imagen?

Solución. *a*) La Figura 14-5 muestra un objeto O y su imagen I. Sean n y n_1 los índices de refracción de los dos medios. La luz proviene del objeto.

La relación de los índices de refracción a las distancias es:

$$n/p = n_1/-q$$

La amplificación es una función del índice de refracción y es igual a la unidad para un espejo plano. De la relación anterior se obtiene:

$$m = -nq/n_1p = -1$$

b) $$q = -\frac{n_1}{n} p = -\frac{1}{1{,}33} 20 = -15 \text{ cm}$$

por debajo de la superficie.

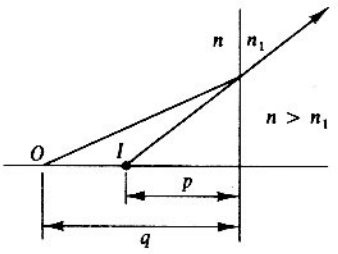


Figura 14-5

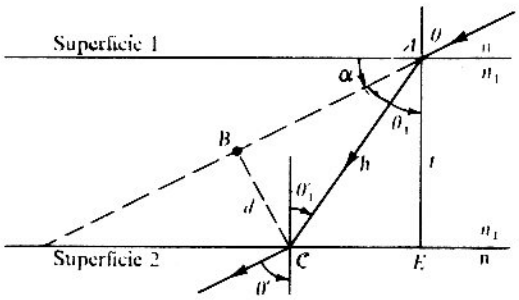


Figura 14-6

Problema 14-6 *a)* Muestre que si un rayo de luz atraviesa las dos caras paralelas de un medio n, entonces el rayo que entra y el que emerge son paralelos. *b)* Halle el desplazamiento. (Figura 14-6.)

Solución. *a)* La refracción en la primera superficie es:

$$n \operatorname{sen} \theta = n_1 \operatorname{sen} \theta_1$$

La refracción en la segunda superficie es:

$$n_1 \operatorname{sen} \theta'_1 = n \operatorname{sen} \theta'$$

Como los ángulos internos son iguales, $\theta'_1 = \theta_1$, entonces:

$$n \operatorname{sen} \theta = n \operatorname{sen} \theta' \quad \therefore \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \theta' \quad \therefore \theta = \theta'$$

b) En el triángulo AEC, $\cos \theta_1 = t/h$ con $h = AC$.
Resolviendo para h, se tiene: $h = t/\cos \theta_1$.
Como $\alpha + \theta_1 = \theta$, $\alpha = \theta - \theta_1$. Además en el triángulo ABC, $\operatorname{sen} \alpha = d/h$, de donde $d = h \operatorname{sen} \alpha$.

Problema 14-7 Un pedazo de lámina de vidrio de 2 centímetros de espesor e índice de refracción 1,5 se emplea para desplazar un rayo de luz. Si el rayo incidente forma un ángulo de 50° con la normal a la superficie del vidrio, ¿cuál es el desplazamiento del rayo emergente?

Solución. El ángulo de refracción está dado por la relación: $n \operatorname{sen} \theta = n_1 \operatorname{sen} \theta_1$, de donde:

$$\operatorname{sen} \theta_1 = \frac{n}{n_1} \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{1{,}5} \operatorname{sen} 50° = \frac{1}{5} 0{,}766 = 0{,}51 \quad \therefore \theta = 30° 40'$$

h es igual a:

$$h = t/\cos \theta_1 = 2/\cos 30° 40' = 2/0{,}86 = 2{,}32 \text{ cm}$$

El desplazamiento está dado por:

$$d = h \operatorname{sen} \alpha = 2{,}32 \operatorname{sen} (50° - 30° 40') = 0{,}77 \text{ cm con } \alpha = \theta - \theta_1$$

Problema 14-8 Muestre que el rayo que entra y el rayo que emerge al atravesar varios medios de caras paralelas son paralelos.

Solución. Aplicando la ley de Snell a la Figura 14-7 y considerando n y n_1 se tiene:

$$n \operatorname{sen} \theta_e = n_1 \operatorname{sen} \theta_1$$

Considerando n_2 y n se tiene:

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2$$

Igualando las dos expresiones anteriores se obtiene: $n \operatorname{sen} \theta_e = n_2 \operatorname{sen} \theta_2$. Considerando n_2 y n (salida) se tiene: $n_2 \operatorname{sen} \theta_2 = n \operatorname{sen} \theta_L$.

Igualando con la expresión anterior se obtiene: $n \operatorname{sen} \theta_e = n \operatorname{sen} \theta_L \quad \therefore \theta_e = \theta_L$.

Como las normales son todas paralelas, el rayo que entra y el que emerge son paralelos y desplazados.

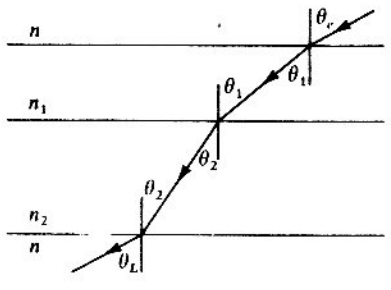


Figura 14-7

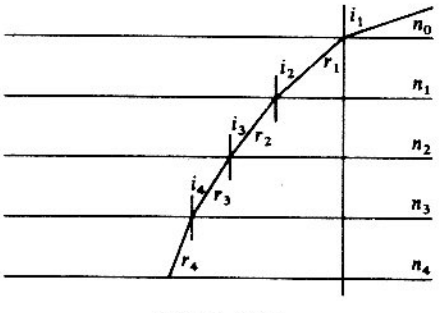


Figura 14-8

Problema 14-9 ¿En qué medio se pueden curvar los rayos de la luz? (Fig. 14-8.)

Solución. La trayectoria de un rayo de luz se puede hacer curva en un medio de índice de refracción variable. Para ver esto considere la trayectoria de un rayo que pasa por una sucesión de láminas planas paralelas, las cuales cambian gradualmente de índice de refracción: $n_0, n_1, n_2, \ldots$ Sea:

$$n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \ldots \tag{1}$$

Cada vez que la luz pasa de una lámina a otra el rayo cambia de dirección, que está dada por:

$$\frac{\operatorname{sen} i_1}{\operatorname{sen} r_1} = \frac{n_1}{n_0} \quad \therefore \operatorname{sen} r_1 = \frac{n_0}{n_1} \operatorname{sen} i_1$$

Por construcción es evidente que: $\operatorname{sen} r_1 = \operatorname{sen} i_2$. Cuando el rayo se refracta en la segunda lámina:

$$\frac{\operatorname{sen} i_2}{\operatorname{sen} r_2} = \frac{\operatorname{sen} r_1}{\operatorname{sen} r_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad \therefore \operatorname{sen} r_2 = \frac{n_1}{n_2} \operatorname{sen} r_1 = \frac{n_0}{n_2} \operatorname{sen} i_1$$

Además:

$$\operatorname{sen} r_2 = \operatorname{sen} i_3; \ \frac{\operatorname{sen} i_3}{\operatorname{sen} r_3} = \frac{\operatorname{sen} r_2}{\operatorname{sen} r_3} = \frac{n_3}{n_2} \quad \therefore \operatorname{sen} r_3 = \frac{n_2}{n_3} \operatorname{sen} r_2 = \frac{n_0 n_2}{n_2 n_3} \operatorname{sen} i_1; \ \operatorname{sen} r_3 = \operatorname{sen} i_4$$

La siguiente refracción da:

$$\frac{\operatorname{sen} i_4}{\operatorname{sen} r_4} = \frac{\operatorname{sen} r_3}{\operatorname{sen} r_4} = \frac{n_4}{n_3}$$

de donde:

$$\operatorname{sen} r_4 = \frac{n_3}{n_4} \operatorname{sen} r_3 = \frac{n_0}{n_4} \operatorname{sen} i_1$$

Teniendo en cuenta la desigualdad (1) se obtiene que sen $r_1 >$ sen $r_2 >$ sen $r_3 >$ sen r_4, es decir, el rayo de luz cambia de dirección cada vez que pasa de una lámina a otra. Si el índice de refracción aumenta gradualmente, el ángulo de refracción correspondiente disminuye. Si el rayo de luz pasa por un gran número de tales láminas delgadas, con un índice de refracción cambiando gradualmente, el rayo seguirá una trayectoria curva. Uno de estos medios es la atmósfera.

Problema 14-10 Deducir la ley de Snell.

Solución. La Figura 14-9 muestra la trayectoria que sigue un rayo para ir de A a B. La velocidad del rayo es c/n_1 en el material superior y c/n_2 en el material inferior. Según la figura, el tiempo que emplea el rayo para ir de A a B es:

$$t = \frac{OA}{v_1} + \frac{OB}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c/n_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{c/n_2}$$

Para hallar los valores extremos de esta función se halla dt/dx y se hace igual a cero. Entonces:

$$\frac{n_1 x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{n_2(d - x)}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}} = 0$$

Según la Figura 14-9:

$$\text{sen } \alpha = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad \text{y} \quad \text{sen } \beta = \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$$

Entonces:

$$n_1 \text{ sen } \alpha = n_2 \text{ sen } \beta \qquad \therefore \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

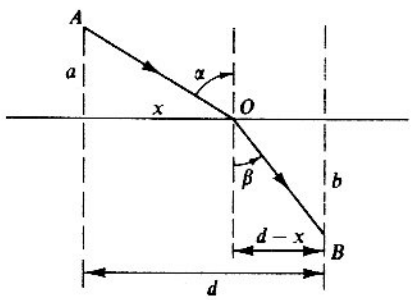


Figura 14-9

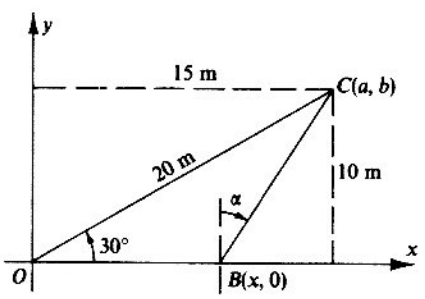


Figura 14-10

Problema 14-11 La velocidad de una persona es de 8 metros por segundo y nada a una velocidad de 4 metros por segundo. Está parada en el borde de una piscina cuando ve que una persona se está ahogando a una distancia de 20 metros, en una dirección que forma un ángulo de 30° con el borde. Para salvarla, ¿cuál es el tiempo mínimo de que dispone?

Solución. La Figura 14-10 muestra la posición de las dos personas y la trayectoria que sigue para ir a salvarla. Tenemos que:

$$BC = \sqrt{(a - x)^2 + b^2}$$

El tiempo que emplea para recorrer la trayectoria OBC es:

$$t = \frac{x}{v_1} + \frac{\sqrt{(a - x)^2 + b^2}}{v_2} \tag{1}$$

con v_1 y v_2 las velocidades de la persona corriendo y nadando, respectivamente.

Para que el tiempo sea mínimo hay que derivar la relación (1) con respecto a x y hacer esta derivada igual a cero. Entonces:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_1} - \frac{a-x}{v_2\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} = 0 \quad \therefore \sqrt{(a-x)^2 + b^2} = \frac{v_1}{v_2}(a-x)$$

$$\therefore \left(\frac{v_1^2}{v_2^2} - 1\right)(a-x)^2 = b^2 \quad \therefore x = a - \frac{b}{\sqrt{\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 - 1}}$$

Como $a = 20 \cos 30°$ y $b = 20 \text{ sen } 30°$, entonces:

$$x = 15 - \frac{10}{\sqrt{\left(\frac{8}{4}\right)^2 - 1}} = 15 - 5{,}7 = 9{,}3 \text{ m}$$

Si hallamos la segunda derivada observamos que es negativa; por tanto, para dicho valor de x se tiene un mínimo. Así,

$$t_{min} = \frac{9{,}3}{8} + \frac{\sqrt{5{,}7^2 + 10^2}}{4} = 4{,}03 \text{ seg}$$

Nota. Observe que el tiempo mínimo es el que emplea un rayo de luz para ir de O a C cuando el eje X coincide con la frontera de los medios. Según las leyes de la óptica:

$$n_2 \text{ sen } \phi = n_1 \text{ sen } \phi' \quad \text{o} \quad \frac{C}{v_2} \text{ sen } \phi = \frac{C}{v_1} \text{ sen } \phi'$$

Como sen $\phi' = 1$, entonces sen $\phi = v_2/v_1$. De la Figura 14-10 se obtiene que:

$$\text{sen } \phi = \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}}$$

y para la trayectoria de tiempo mínimo:

$$\text{sen } \phi = \frac{a-x}{\left(\frac{v_1}{v_2}\right)(a-x)} = \frac{v_2}{v_1}$$

Esto dice que la trayectoria de tiempo mínimo sigue la ley de Snell, siendo ϕ el ángulo crítico.

Problema 14-12 Un rayo de luz forma un ángulo de 45° con la cara superior de un cubo de vidrio de índice de refracción 1,3. ¿Se refleja completamente el rayo en la cara vertical? (Figura 14-11.)

Solución. El ángulo de refracción está dado por:

$$\text{sen } \theta' = \text{sen } 45°/n' = 0{,}707/1{,}3 = 0{,}54 \quad \therefore \theta' = 32° 50'$$

El rayo refractado incide en la cara vertical formando un ángulo θ de 57° 10'; para que se refleje totalmente es necesario que el ángulo de incidencia sea menor que el ángulo límite cuyo valor es:

$$\text{sen } \theta_c = n/n' = 1/1{,}3 = 0{,}76$$

y, por consiguiente, $\theta_c = 50° 17'$. Observe que $\theta_c < \theta$, o sea, que el ángulo límite es menor que 57° 10'. Es decir, el rayo incidente en la cara vertical se refleja totalmente.

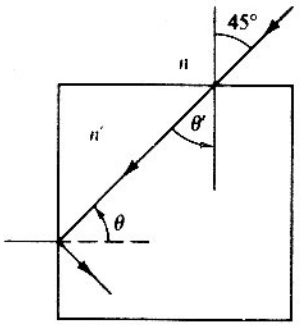


Figura 14-11

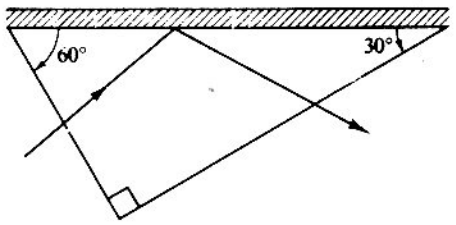


Figura 14-12

Problema 14-13 Un rayo de luz incide normalmente sobre la cara de un prisma como lo indica la Figura 14-12. Si el índice del prisma es 1,5, halle el índice máximo de un líquido colocado en la hipotenusa para que la luz se refleje totalmente.

Solución. El ángulo con el cual incide el rayo en el líquido es de 60° y para que se refleje totalmente es necesario que el ángulo de refracción θ' sea, por lo menos, de 90°. Según la ley de Snell: $n \operatorname{sen} \theta = n' \operatorname{sen} \theta'$, con n' el índice máximo de refracción del líquido. Entonces:

$$n' = n \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta'} = n \operatorname{sen} \theta = 1{,}5 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = 1{,}5 \cdot (0 \cdot 86) = 1{,}3$$

Problema 14-14 Halle el índice de refracción de un prisma.

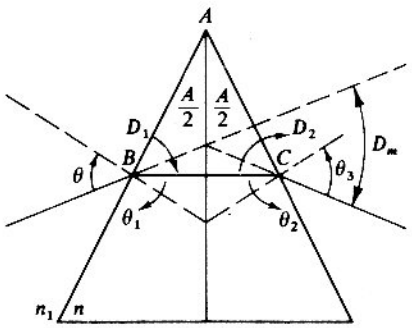


Figura 14-13

Solución. La Figura 14-13 muestra un prisma de vértice A. El rayo incidente forma un ángulo θ con la normal que pasa por el prisma y es perpendicular a la bisectriz del ángulo A. Esto forma un triángulo isósceles ABC. El rayo se refracta en la segunda superficie de tal manera que $\theta = \theta_3$ si $\theta = \theta_1 + D_1$ y $\theta_3 = \theta_2 + D_2$. De donde: $D_1 = \theta - \theta_1$ y $D_2 = \theta_3 - \theta_2$. Como $D_m = D_1 + D_2$, entonces:

$$D_m = (\theta - \theta_1) + (\theta_3 - \theta_2) = (\theta + \theta_3) - (\theta_1 + \theta_2)$$

Como $\theta_1 + \theta_2 = A$ y $\theta = \theta_3$ (para la desviación mínima), entonces:

$$D_m = 2\theta - A \quad \text{o} \quad \theta = \frac{D_m + A}{2}$$

También, $\theta_1 = A/2$. Aplicando la ley de Snell: $n_1 \operatorname{sen} \theta = n \operatorname{sen} \theta_1$, de donde:

$$n = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta_1} \qquad (n_1 = 1)$$

Remplazando en esta última expresión los valores de θ y θ_1, se obtiene:

$$n = \frac{\operatorname{sen}\left[(D_m + A)/2\right]}{\operatorname{sen} A/2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(D_m + A)}{\operatorname{sen}(A/2)}$$

Nota. Si el ángulo del vértice es pequeño: $n = \dfrac{A + D_m}{A}$.

Problema 14-15 *a*) Halle el índice de refracción de un prisma de vidrio de 60° cuando el ángulo de desviación mínimo es 46° 16′. *b*) Si el índice de refracción es 1,7 halle el ángulo de desviación mínimo.

Solución. *a*) $n = \dfrac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A + D_m)}{\operatorname{sen} \frac{A}{2}} = \dfrac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(60° + 46° 16')}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} 60°} = 1{,}6.$

b)

$$n = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A + D_m)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} A} \qquad 1{,}7 \operatorname{sen} 30° = \operatorname{sen} \frac{60° + D_m}{2}$$

de donde:

$$\operatorname{arc\,sen}(0{,}85) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{60° + D_m}{2}\right) \quad \text{o} \quad 58° 13' \cdot 2 = 60° + D_m$$

Entonces el ángulo de desviación mínimo es $D_m = 56° 26'$.

Problema 14-16 Un rayo de luz cae normalmente a la cara de un prisma de ángulo pequeño. Al tocar la segunda cara, parte se refleja y parte se refracta. El rayo reflejado forma un ángulo de $\frac{13°}{2}$ con la dirección invertida del rayo incidente. El rayo refractado sufre una desviación de $\frac{5°}{2}$ con la dirección original. Calcule el índice de refracción del vidrio y el ángulo del prisma. (Fig. 14-14.)

Solución. Sea α el ángulo del prisma y n su índice de refracción. Además, $\delta_1 = (n - 1)\alpha$. El ángulo APC es recto lo mismo que ACE. También, $\sphericalangle ACP = 90° - \alpha$. $\therefore$ $PCE = \alpha$ y, según la ley de la reflexión, $\sphericalangle PCB = 2\alpha$.

$$\therefore \sphericalangle PBC = 90° - 2\alpha \quad \text{o} \quad \sphericalangle CBF = 2\alpha$$

La ley de Snell aplicada al punto B da $n \operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen} \delta_2$, y como para ángulos pequeños $\operatorname{sen} \alpha = \alpha$, entonces $\delta_2 = 2n\alpha$.

Haciendo el cociente de las δ se obtiene:

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{n - 1}{2n} \quad \text{o} \quad \frac{1}{n} = 1 - \frac{5}{13}$$

de donde:

$$n = \frac{13}{8}$$

Entonces:

$$\alpha = \frac{\frac{13}{2}}{2 \cdot \frac{13}{8}} = 2°$$

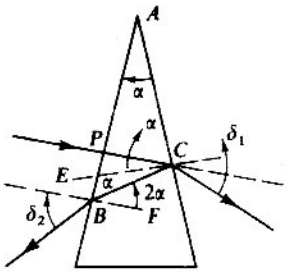


Figura 14-14

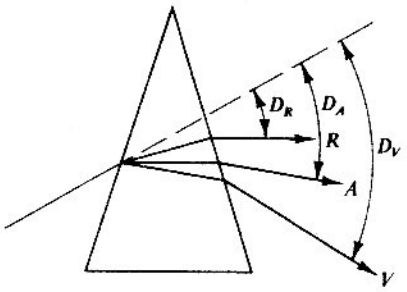


Figura 14-15

Problema 14-17 La dispersión es la separación angular entre dos colores. Halle la relación que da la dispersión entre la luz roja R (6563 angstroms) y la luz violeta (3968 angstroms). (Fig. 14-15.) Vea previamente la *Nota* al final del problema.

Solución. Como los prismas que dispersan la luz son de ángulo pequeño en el vértice, se puede utilizar la ecuación:

$$n = \frac{D_m + A}{A}$$

La desviación de la luz roja R es:

$$D_R = n_R A - A = A(n_R - 1)$$

La dispersión de la luz violeta V es:

$$D_V = A(n_V - 1)$$

Sea D la desviación y D_{R-V} la dispersión de la luz roja a la luz violeta. De la definición de dispersión se tiene que:

$$D_{R-V} = D_V - D_R = A(n_V - 1) - A(n_R - 1) = A(n_V - n_R)$$

Nota. La desviación media es la de la luz amarilla A, de longitud de onda 5893 angstroms. La potencia dispersiva se relaciona con la desviación media de la luz amarilla por:

$$\omega = \frac{A(n_V - n_R)}{A(n_A - 1)} = \frac{n_V - n_R}{n_A - 1}$$

Problema 14-18 Un prisma está hecho de vidrio flint, de potencia dispersiva 0,0271, y tiene un ángulo en el vértice de 8°. ¿Cuál es la separación entre la luz azul y roja?

Solución.

$$\omega = \frac{n_a - n_R}{n_A - 1}$$

con $n_A = 1{,}6273$; $n_a = 1{,}6394$; $n_R = 1{,}6224$; $\omega = 0{,}0271$; $A = 8°$.

De la ecuación anterior, despejando $n_a - n_R$, se obtiene:

$$n_a - n_R = \omega(n_A - 1) = 0{,}0271(1{,}6273 - 1) = 0{,}017$$

La dispersión es: $D_{R-a} = A(n_a - n_R) = 8° \cdot 0{,}017 = 0{,}136°$, separación.

Problema 14-19 Los prismas se pueden combinar para producir varios efectos. Uno de ellos es el de visión directa. Los dos prismas se pueden combinar de tal manera que el rayo D no sufre ninguna desviación. *a*) Halle el ángulo del segundo prisma en combinación con el

primero. *b*) Si un prisma de vidrio crown, de ángulo en el vértice de 8°, se combina con un prisma de vidrio flint, ¿cuál debe ser el ángulo del vértice para el segundo prisma para que la combinación produzca una «visión directa»? (Fig. 14-16.)

Solución. *a*) Sea para el primer prisma: D_D = desviación de la recta D; A = ángulo del vértice; n_D = índice de refracción de la luz D. Para el segundo prisma: D_{D_1} = desviación de la recta D; A_1 = ángulo en el vértice; n_{D_1} = índice de refracción del rayo D_1.

Como la recta D no se desvía:

$$D_D - D_{D_1} = 0$$

y como $D_D = A(n_D - 1)$ y $D_{D_1} = A_1(n_{D_1} - 1)$, entonces: $A(n_D - 1) - A_1(n_{D_1} - 1) = 0$. Por consiguiente,

$$A_1 = \frac{A(n_D - 1)}{n_{D_1} - 1}$$

b) El ángulo del vértice para el vidrio flint es:

$$A_1 = \frac{A(n_D - 1)}{n_{D_1} - 1} = \frac{8(1{,}5171 - 1)}{1{,}6555 - 1} = 6{,}31°$$

La separación angular entre los rayos C y H para los dos prismas debe ser una función entre la luz C y H, como resultado de pasar por el primer prisma y la separación producida por el segundo.

La separación angular producida por el primer prisma es: $D_{C-H} = A(n_H - n_C)$, y la separación producida por el segundo: $D_{C_1-H_1} = A(n_{H_1} - n_{C_1})$. Entonces la separación total entre el rayo C y H es:

$$D_{C_1-H_1} - D_{C-H} = A_1(n_{H_1} - n_{C_1}) - A(n_H - n_C)$$

Para este caso, la relación anterior es:

$$D_{C_1-H_1} - D_{C-H} = A_1(n_{H_1} - n_{C_1}) - A(n_H - n_C) = 6{,}31°(1{,}694 - 1{,}6501) - 8°(1{,}5325 - 1{,}5146) = 0{,}1338°$$

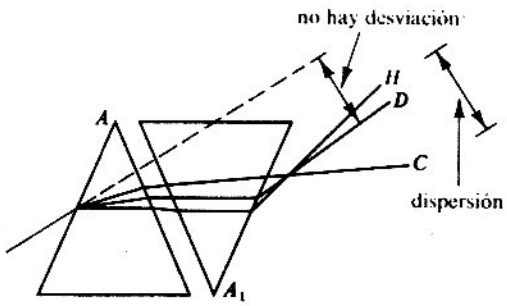


Figura 14-16

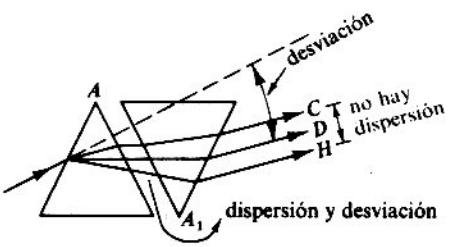


Figura 14-17

Problema 14-20 En la Figura 14-17 se observa que la acromatización propia de la dispersión producida por el primer prisma es corregida por la refracción en el segundo. *a*) Halle el ángulo A de la combinación. *b*) ¿Cuál debe ser el ángulo del vértice de un prisma de vidrio flint para que se produzca acromatización si el primer prisma es de vidrio crown y de 8° su ángulo en el vértice?

Solución. Sea para el primer prisma: A = ángulo del vértice; n_H = índice de refracción de la luz H; n_C = índice de refracción de la luz C. Para el segundo prisma: A_1 = ángulo del vértice; n_{H_1} = índice de refracción de la luz H; n_{C_1} = índice de refracción de la luz C.

a) Como no hay dispersión,

$$D_{H_1-C_1} = D_{H-C}$$

Por consiguiente,

$$A_1(n_{H_1} - 1) - A_1(n_{C_1} - 1) = A(n_H - 1) - A(n_C - 1) \quad \text{o} \quad A_1(n_{H_1} - n_{C_1}) = A(n_H - n_C)$$

De donde se obtiene el valor del ángulo A_1, es decir,

$$A_1 = \frac{A(n_H - n_C)}{n_{H_1} - n_{C_1}}$$

b) El ángulo del vértice para que se produzca acromatización es:

$$A_1 = \frac{A(n_H - n_C)}{n_{H_1} - n_{C_1}} = \frac{8\,(1{,}5325 - 1{,}5146)}{1{,}694 - 1{,}6501} = 3{,}26°$$

La desviación de la recta D es:

$$D_D - D_{D_1} = A(n_D - 1) - A_1(n_{D_1} - 1) = 8°\,(1{,}5171 - 1) - 3{,}26°\,(1{,}6555 - 1) = 1{,}999°$$

Problema 14-21 La luz blanca incide en un prisma con ángulo en el vértice de 15°. *a*) ¿Cual es el ángulo de dispersión de la luz roja y azul si los índices de refracción son 1,64 y 1,66, respectivamente. *b*) Halle los mismos ángulos empleando la fórmula de la dispersión para ángulos pequeños.

Solución. *a*) Empleando la fórmula de la desviación mínima de un prisma:

$$n = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A + D)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}A} \tag{1}$$

tenemos que para la luz roja:

$$1{,}64 = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A + D)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(15°)} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A + D)}{\operatorname{sen} 7\frac{1}{2}°} \quad \text{o} \quad \operatorname{sen}\frac{1}{2}(A + D) = 1{,}64(0{,}1305) = 0{,}2140$$

Por tanto,

$$\frac{1}{2}(A + D) = 12{,}35° \quad \text{y} \quad (A + D) = 2 \cdot 12{,}35° = 24{,}7°$$

Como $A = 15°$,

$$(15° + D) = 24{,}7° \quad \text{y} \quad D = 9{,}7°$$

Para la luz azul:

$$1{,}66 = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A + D)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(15°)} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A + D)}{\operatorname{sen} 7\frac{1}{2}°} \quad \text{o} \quad \operatorname{sen}\frac{1}{2}(A + D) = 1{,}66\,(\operatorname{sen} 7{,}5°) = 1{,}66(0{,}1305) = 0{,}2166$$

Por tanto,

$$\frac{1}{2}(A + D) = 12{,}5° \quad \text{y} \quad (A + D) = 2 \cdot 12{,}5° = 25°$$

Ahora, como $A = 15°$,

$$(15° + D) = 25° \quad \text{y} \quad D = 10°$$

Entonces el ángulo de dispersión es el ángulo de desviación de la luz azul menos el ángulo de desviación de la luz roja.

$$\text{Angulo de dispersión} = 10° - 9{,}7° = 0{,}3°$$

b) En este caso, la fórmula (1) se convierte en:

$$n = \frac{A + D}{A} \tag{2}$$

De donde:

$$nA = A + D \quad \text{o} \quad D = A(n - 1)$$

La fórmula (2), para los dos colores, se convierte en:

$$D_{\text{rojo}} = A(n_{\text{rojo}} - 1) \quad \text{y} \quad D_{\text{azul}} = A(n_{\text{azul}} - 1)$$

Restando las dos ecuaciones anteriores se obtiene:

$$D_{\text{azul}} - D_{\text{rojo}} = A(n_{\text{azul}} - n_{\text{rojo}})$$

Entonces, el ángulo de dispersión entre los rayos azul y rojo es:

$$A(n_{\text{azul}} - n_{\text{rojo}}) = 15°(1{,}66 - 1{,}64) = 15°(0{,}02) = 0{,}3°$$

que coincide con el resultado hallado en el caso *a*) empleando la fórmula general.

Problema 14-22 ¿Cuál debe ser el ángulo de un prisma de vidrio flint para que, combinado con un prisma de vidrio crown de ángulo en el vértice 3°, produzca una desviación sin dispersión de los rayos de luz azul y rojo?

Solución. Para el vidrio crown:

$$n_{\text{rojo}} = 1{,}516, \; n_{\text{azul}} = 1{,}5249$$

Para el vidrio flint:

$$n_{\text{rojo}} = 1{,}6144, \; n_{\text{azul}} = 1{,}6315$$

Empleando la fórmula para ángulos pequeños:

$$D = A(n - 1)$$

Para el vidrio crown:

$$D_{\text{rojo}} = 3°(1{,}516 - 1) = 1{,}548°$$
$$D_{\text{azul}} = 3°(1{,}5249 - 1) = 1{,}575°$$

El ángulo de dispersión entre el azul y el rojo = $1{,}575° - 1{,}548° = 0{,}027°$. Para el vidrio flint:

$$D_{\text{rojo}} = A(1{,}6144 - 1) = A(0{,}6144)$$
$$D_{\text{azul}} = A(0{,}6315 - 1) = A(0{,}6315)$$

El ángulo de dispersión entre el azul y el rojo es $= A(0{,}6314) - A(0{,}6144) = A(0{,}0171)$.

Como para equilibrar las dispersiones se debe relacionar la dispersión del uno con la del otro, $0{,}027° = A(0{,}0171)$, de donde $A = 0{,}027°/0{,}0171 = 1{,}58°$, que es el ángulo del prisma de vidrio flint. La dispersión de la luz roja y azul, según el prisma de vidrio flint, es:

$$D_{\text{rojo}} = A(0{,}6144) = 1{,}58°(0{,}6144) = 0{,}97°$$
$$D_{\text{azul}} = A(0{,}6315) = 1{,}58°(0{,}6315) = 0{,}997°$$

Como las desviaciones son opuestas entre sí, las desviaciones netas para las dos luces son:

$$D_{\text{rojo}}\,(\text{vidrio crown}) - D_{\text{rojo}}\,(\text{vidrio flint}) = 1{,}548° - 0{,}97° = 0{,}578°$$
$$D_{\text{azul}}\,(\text{vidrio crown}) - D_{\text{azul}}\,(\text{vidrio flint}) = 1{,}575° - 0{,}997° = 0{,}578°$$

Esto muestra que hay desviación sin dispersión.

Problema 14-23 ¿Cuál debe ser el ángulo de un prisma de vidrio flint para que puesto en contacto con un prisma de 3° de vidrio crown produzca una dispersión sin desviación?

Solución. Se puede hacer la combinación de tal manera que la luz verde pase sin desviarse y la luz roja y azul experimenten una pequeña desviación:

$$n_{\text{verde (crown)}} = 1{,}52;\ n_{\text{verde (flint)}} = 1{,}623$$
$$D_{\text{verde (crown)}} = A(n - 1) = 3°(1{,}52 - 1) = 1{,}56°$$
$$D_{\text{verde (flint)}} = A(n - 1) = A(1{,}623 - 1) = A(0{,}623)$$

Igualando las dos desviaciones:

$$A(0{,}623) = 1{,}56° \quad \therefore\ A = 1{,}56°/0{,}623 = 2{,}5°$$

que es el ángulo del prisma de vidrio flint, y la luz verde pasa sin desviarse. Ahora:

$$D_{\text{rojo (flint)}} = A(n - 1) = 2{,}5°(1{,}6144 - 1) = 1{,}54°$$
$$D_{\text{azul (flint)}} = A(n - 1) = 2{,}5°(1{,}6315 - 1) = 1{,}58°$$

Así, el ángulo de dispersión entre los dos colores en el prisma de vidrio flint es: $1{,}58° - 1{,}54° = 0{,}04°$.

En el problema anterior se mostró que el ángulo de dispersión entre el rayo azul y rojo en el vidrio crown es 0,027°; por tanto, la dispersión de la combinación de prismas es la diferencia en sus dispersiones o $0{,}04° - 0{,}027° = 0{,}013°$. (Fig. 14-18.)

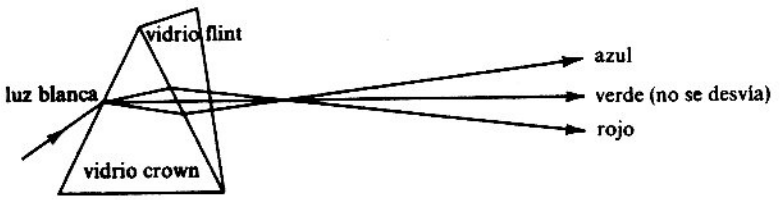


Figura 14-18

Problema 14-24 El conductor de un vehículo tiene un espejo visor situado a 1 metro delante de él. Le permite ver el ancho de una carretera que es de 10 metros a una distancia de 40 metros detrás de él. Calcule el ancho del espejo.

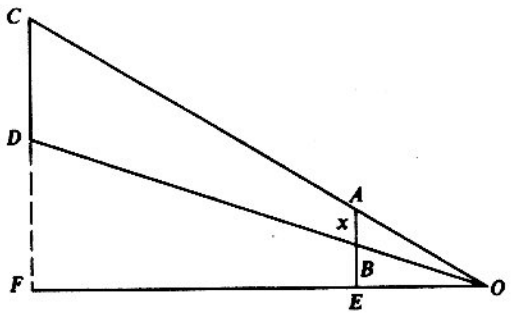


Figura 14-19

Solución. La Figura 14-19 muestra la localización de los elementos que intervienen en el problema. AB es el ancho del espejo, CD el ancho de la imagen.

Como los triángulos OEA y OFC, OEB y OFD son semejantes se tiene que:

$$AE/CF = OE/OF \quad \text{y} \quad BE/DF = OE/OF$$

Por tanto,

$$AE = \frac{OE}{OF} CF \quad \text{y} \quad BE = \frac{OE}{OF} DF$$

Entonces:

$$(AE - BE) = \frac{OE}{OF}(CF - DF) \quad \therefore x = \frac{1\text{ m}}{42\text{ m}} \cdot 10\text{ m} = 0{,}238\text{ m} \approx 24\text{ cm}.$$

Imágenes formadas por reflexión y refracción

Problema 14-25 Halle la posición de las imágenes formadas por los dos espejos planos que se muestran en la Figura 14-20. ¿Desde dónde se debe mirar para ver cada una de las imágenes?

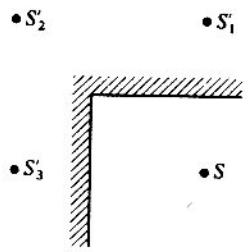


Figura 14-20

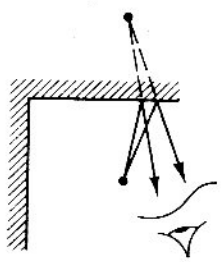


Figura 14-21

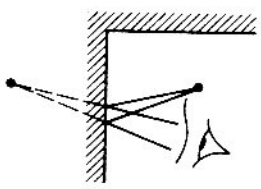


Figura 14-22

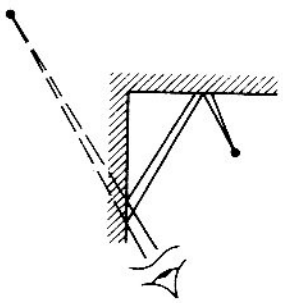


Figura 14-23

Solución. Hay tres imágenes posibles: S'_1, S'_2 y S'_3. S'_1 y S'_3 son las imágenes de S. La Figura 14-23 indica el proceso por medio del cual se forma la imagen.

Problema 14-26 Deduzca la ecuación que relaciona la distancia del objeto, la distancia de la imagen y el radio de curvatura del espejo.

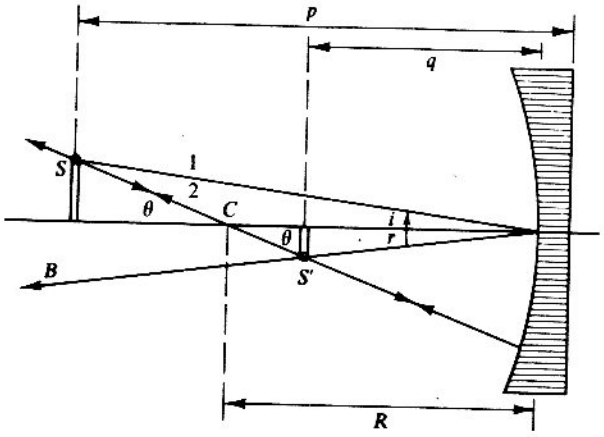


Figura 14-24

Solución. Las distancias se indican en la Figura 14-24. Sea S la longitud del objeto y S' la de su imagen. La figura muestra que:

$$\text{tg } r = S'/q \quad \text{y} \quad \text{tg } i = S/p$$

Según la ley de la reflexión, los dos ángulos son iguales; por tanto,

$$S'/q = S/p \quad \text{o} \quad S'/S = q/p$$

Se puede obtener una segunda relación para S'/S observando que:

$$\text{tg } \theta = \frac{S}{p - R} \quad \text{y} \quad \text{tg } \theta = \frac{S'}{R - q}$$

de donde:

$$S'/S = \frac{R - q}{p - R}$$

Igualando las dos expresiones para S'/S se obtiene: $q/p = \dfrac{R - q}{p - R}$.

$$\therefore\ q(p - R) = p(R - q) \quad \therefore\ qp - qR = pR - pq \quad \therefore\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R}$$

Esta ecuación se llama la ecuación de un espejo.

Como $f = R/2$, la ecuación anterior se convierte en $1/p + 1/q = 1/f$.

Problema 14-27 Deduzca la ecuación de los espejos convexos.

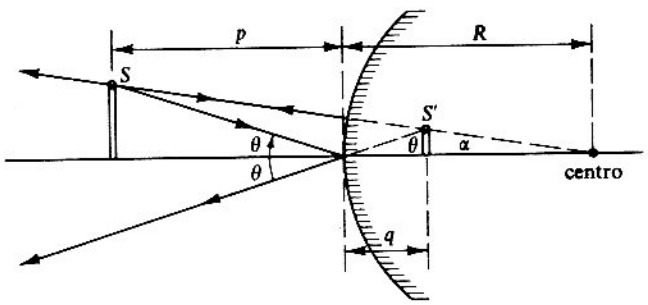


Figura 14-25

Solución. Los ángulos θ son iguales. ¿Por qué? Sean S y S' las alturas del objeto y su imagen. Según la Figura 14-25 tenemos que $\text{tg } \theta = S/p$ y $\text{tg } \theta = S'/q$, de donde $S'/S = q/p$. Para el ángulo α tenemos que:

$$\text{tg } \alpha = \frac{S}{p + R} \quad \text{y} \quad \text{tg } \alpha = \frac{S'}{R - q}$$

Igualando las dos expresiones anteriores tenemos que:

$$\frac{S'}{S} = \frac{R - q}{R + p}$$

Igualando las dos expresiones halladas para S'/S se tiene:

$$\frac{S'}{S} = \frac{q}{p} = \frac{R - q}{R + p}$$

de donde:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R}$$

Nota. Si se establecen los siguientes convenios se obtiene una sola ecuación para los espejos cóncavos y convexos: $1/p + 1/q = 2/R = 1/f$.

1. Los radios de los espejos convexos se toman como negativos, y los radios de los espejos cóncavos como positivos.
2. Cuando la distancia de la imagen, q, está más allá del espejo, q se toma como negativa para todos los espejos. Se toma como positiva en la parte iluminada del espejo.
3. Las distancias del objeto son positivas si el objeto es real.

Problema 14-28 Un espejo convexo tiene un radio de curvatura de 25 centímetros. Halle la posición de la imagen y su tamaño cuando un objeto de 6 centímetros está a 35 centímetros del vértice. Dibuje un diagrama de rayos. ¿Es la imagen real o virtual, invertida o derecha? (Fig. 14-26.)

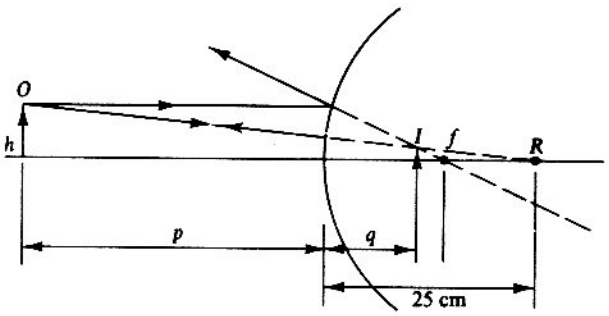


Figura 14-26

Solución. La distancia de la imagen está dada por $1/p - 1/q = -2/R$, o sea, $1/35 - 1/q = -2/25$, de donde $q = 9.2$ cm.

Su tamaño es $m = q/p = \dfrac{9,2}{35}$; $0,26x = 0,26 \cdot 6 = 1,56$ cm, tamaño de la imagen; virtual y derecha.

Problema 14-29 Un espejo cóncavo tiene una longitud focal de 10 centímetros. *a*) Halle la posición de la imagen y su tamaño cuando un objeto de 5 centímetros está a 30 centímetros a la izquierda del vértice; *b*) 5 centímetros a la izquierda del vértice. Dibuje un diagrama de rayos. ¿Es la imagen real o virtual, invertida o derecha?

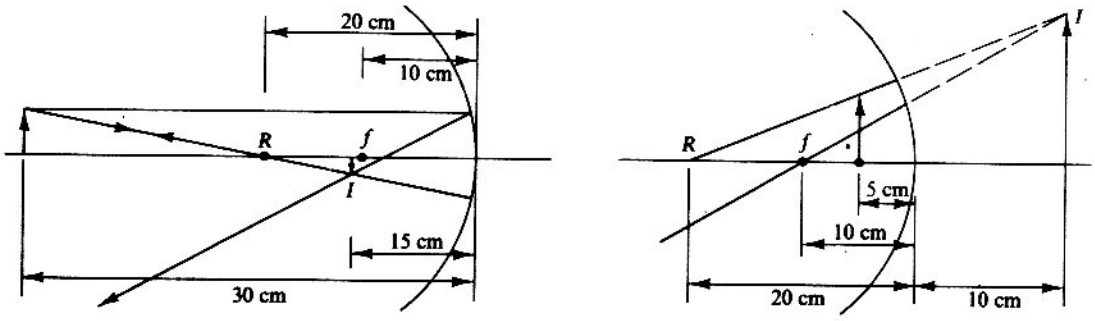


Figura 14-27

Solución. *a*) La posición de la imagen está dada por la ecuación:

$$1/p + 1/q = 1/f \quad \text{o} \quad 1/30 + 1/q = 1/10 \quad \therefore\ q = +15 \text{ cm}$$

El tamaño es $m = q/p = \dfrac{-15}{30}$; $-0,5x = 0,5(5) = 2,5$ cm; real e invertida.

b) La distancia de la imagen es:

$$1/5 + 1/q = 1/10 \quad \therefore q = 10 \text{ cm}$$

Su tamaño es $m = q/p = \dfrac{10}{5}$; $2x = 2 \cdot 5 = 10$ cm. virtual, derecha.

Problema 14-30 *a*) ¿Cuál es la longitud focal de un espejo cóncavo que produce una imagen real 10 veces el tamaño real de un objeto, colocado a 30 centímetros del espejo? *b*) ¿En qué punto se debe colocar un objeto frente a un espejo esférico cuyo radio de curvatura es de 18 centímetros para que produzca una imagen real tres veces el tamaño real?

Solución. *a*) Como el tamaño es 10, entonces $q/p = 10$ o $q = 10p$, y como $p = 30$ cm, entonces $q = 10 \cdot 30 = 3$ m.

Remplazando los datos en la ecuación $1/p + 1/q = 1/f$ se obtiene:

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{300} = \frac{1}{f} \quad \therefore \frac{11}{300} = \frac{1}{f} \quad \therefore f = \frac{300}{11} \approx 27 \text{ cm}$$

Por tanto, la distancia focal del espejo es de 27 cm. Su radio de curvatura es el doble, o sea, $2(27) = 54$ cm.

b) El espejo debe ser cóncavo para que produzca una imagen real y, por tanto, la longitud focal debe ser positiva. Como el tamaño es 3, $q/p = 3$ o $q = 3p$. Entonces, empleando la ecuación $1/p + 1/q = 1/f$, con $q = 3p$ y $f = 9$ cm, porque la longitud focal es la mitad del radio de curvatura,

$$1/p + 1/3p = 1/9 \quad \text{o} \quad 4/3p = 1/9, \quad \text{de donde} \quad p = 12 \text{ cm}$$

El objeto se debe colocar a 12 cm y enfrente del espejo cóncavo para que se obtengan los resultados pedidos.

Problema 14-31 Halle la ecuación general de refracción para la formación de imágenes para una superficie esférica.

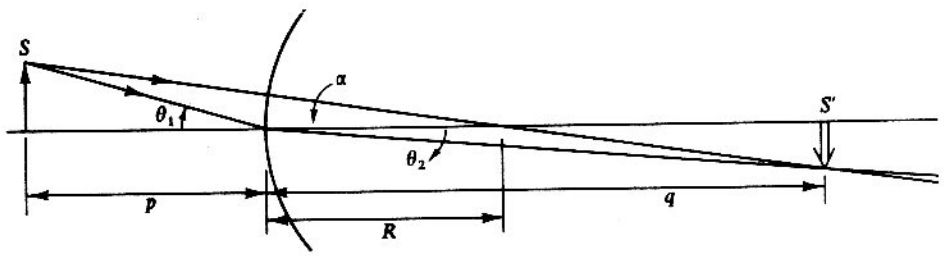


Figura 14-28

Solución. Según la Figura 14-28, del extremo superior del objeto salen dos rayos, el rayo 1, que incide normalmente en la superficie, y el rayo 2, que pasa por el vértice de la superficie. Los dos rayos determinan la imagen S'.

Para hallar la posición de la imagen sean S y S' las longitudes del objeto e imagen, respectivamente. Entonces:

$$\text{tg } \theta_1 = S/p \quad \text{y} \quad \text{tg } \theta_2 = S'/q$$

Si los ángulos θ_1 y θ_2 son pequeños, las tangentes se pueden remplazar por los senos de los ángulos. Entonces, dividiendo miembro a miembro las dos ecuaciones anteriores, se encuentra que:

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{S}{S'} \frac{q}{p}$$

Según la ley de Snell, el término de la izquierda se puede remplazar por n_2/n_1; entonces:

$$S/S' = pn_2/qn_1$$

Se obtiene otra relación para S/S', observando la figura:

$$\text{sen } \alpha \approx \frac{S}{p + R} \quad \text{y} \quad \text{sen } \alpha \approx \frac{S'}{q - R}$$

Igualando las dos expresiones y reordenando los términos se obtiene:

$$S/S' = \frac{p + R}{q - R}$$

Igualando las dos expresiones que se obtuvieron para S/S' se halla:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

El resultado anterior es válido en el caso de que $n_2 > n_1$; para el caso contrario, el desarrollo es análogo.

Nota. Si el radio de curvatura es tal que el centro de curvatura está del lado que proviene la luz, la ecuación se aplica si R se toma como negativo. En todos los casos, la distancia de la imagen q es positiva si la imagen está del mismo lado al cual va la luz; de otra manera, se toma a q como negativo.

Problema 14-32 Una superficie esférica y convexa tiene un radio de curvatura de 5 centímetros. La superficie esférica está en uno de los extremos de una varilla hueca, que está llena de alcohol etílico, de índice de refracción 1,36. Si un objeto se coloca a 60 centímetros a la izquierda del vértice de la esfera y si la altura del objeto es de 2 centímetros, halle; *a*) la posición de la imagen; *b*) el tamaño de la imagen.

Solución. $\frac{n}{p} + \frac{n_1}{q} = \frac{n_1 - n}{R}$. Remplazando los datos se obtiene:

$$\frac{1}{60} + \frac{1{,}36}{q} = \frac{1{,}36 - 1}{5} \quad \therefore \frac{q}{1{,}36} = \frac{300}{16{,}6} \quad \therefore q = 24 \text{ cm}$$

a la derecha del vértice.

El tamaño es:

$$m = -\frac{nq}{n_1 p} = \frac{-1 \cdot 24}{1{,}36 \cdot 60} = -0{,}29, \text{ invertida}$$

Por tanto,

$$h_i = h_0 \cdot m = (0{,}29)2 = 0{,}58 \text{ cm}$$

Problema 14-33 Una barra de 30 centímetros, de índice de refracción 1,5, tiene sus extremos esféricos como se indica en la Figura 14-29. El radio de la izquierda es de 12 centímetros y el de la derecha de 18 centímetros. Se coloca un objeto a 90 centímetros del extremo izquierdo de la superficie. Halle la posición y el tamaño de la imagen.

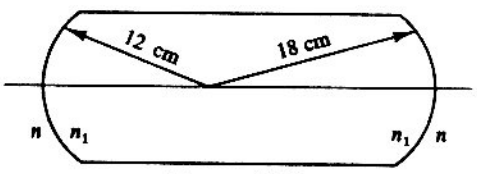


Figura 14-29

Solución. Para la refracción en la superficie de la izquierda se tiene:

$$\frac{n}{p_1} + \frac{n_1}{q_1} = \frac{n_1 - n}{R_1}$$

con $n = 1$; $n_1 = 1{,}5$; $R_1 = 12$ cm; $p_1 = 90$ cm.

Al remplazar los datos se obtiene:

$$\frac{1}{90} + \frac{1{,}5}{q_1} = \frac{1{,}5 - 1}{12} \quad \therefore\ q_1 = 49 \text{ cm}$$

Para la refracción en la superficie de la derecha se obtiene:

$$\frac{n_1}{p_2} + \frac{n_2}{q_2} = \frac{n_2 - n_1}{R_2}$$

con $p_2 = 30 - 49 = -19$ cm (virtual); $R_2 = -18$ cm; $n_1 = 1{,}5$; $n_2 = 1$. Remplazando los datos en la ecuación se obtiene:

$$\frac{1{,}5}{-19} + \frac{1}{q_2} = \frac{1 - 1{,}5}{-18} \quad \therefore\ q_2 \approx 9 \text{ cm}$$

a la derecha del segundo vértice (imagen real).

Problema 14-34 Una alberca de fondo plano tiene 2,4 metros de profundidad. *a*) Calcule cuál será la profundidad aparente cuando está llena con agua cuyo índice de refracción es 4/3. *b*) Si una capa de éter ($n = 1{,}36$) de 2 centímetros de espesor flota sobre el agua, ¿cuál es la distancia aparente desde la superficie del éter al fondo de la capa de agua cuando se mira normalmente a la superficie?

Solución. *a*) Este problema es una aplicación de la fórmula para una superficie única cuando el radio de curvatura es infinito.

Para seguir los convenios, la alberca debe dibujarse con el fondo vertical para que la luz pase de izquierda a derecha, es decir, del medio n al medio n_1. Aplicando la fórmula para una sola superficie:

$$R = \infty,\ p = d;\ \frac{4/3}{p} + \frac{1}{q} = 0 \quad \therefore\ \frac{1}{q} = -\frac{4/3}{p} \quad \therefore\ q = -0{,}75\,d = -0{,}75(2{,}4) = -1{,}8 \text{ m}$$

Esto dice que la alberca parece ser de una profundidad de 1,8 m en vez de 2,4 m.

b) Sea h_1 la distancia aparente del objeto dentro del medio considerado, h la altura real del medio. Empleando la relación $h_1/h = n_1/n$ se obtiene:

$$h_1 = \frac{n_1}{n} h = \frac{2{,}4}{4/3} = 1{,}8 \text{ m}$$

para los medios aire y agua.

Ahora, tomando los medios aire y éter se obtiene:

$$h_2 = \frac{n_1}{n} h = \frac{1}{1{,}36} 2 = 1{,}47 \approx 1{,}5 \text{ cm.}$$

Se han considerado los medios de propagación como si estuvieran unidos. Entonces la distancia aparente desde la superficie del éter al fondo del agua es $d = h_1 + h_2 = 1{,}815$ m, que es menor que la distancia real, que es $d = 2{,}42$ m.

Problema 14-35 ¿Cuál debe ser el índice de refracción de una esfera transparente para que los rayos paraxiales que provienen de un objeto situado en el infinito se concentren en el vértice de la segunda superficie? (Fig. 14-30.)

Solución. Para el aire: $n = 1$, $S' = 2R$, $S = \infty$. Empleando la ecuación:

$$\frac{n}{S} + \frac{n'}{S'} = \frac{n' - n}{R} \quad \text{se obtiene:} \quad \frac{n'}{2R} = \frac{n' - 1}{R}$$

porque $n/S = 0$ para $S = \infty$. Por tanto, $n'/2 = n' - 1$.

$$\therefore\ n' - \frac{n'}{2} = 1 \qquad \therefore\ n' = 2$$

que es el índice de refracción de la esfera.

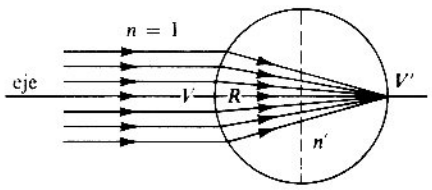


Figura 14-30

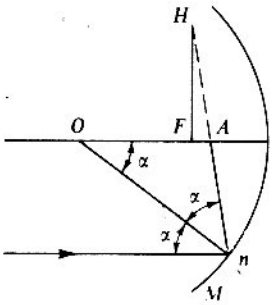


Figura 14-31

Problema 14-36 Si sobre un espejo esférico incide un haz luminoso ancho (la anchura del haz depende del ángulo α), el rayo que marcha paralelamente al eje óptico y que incide cerca del borde del espejo, después de reflejarse cruzará dicho eje no por el foco, sino a cierta distancia AF de él. La distancia AF se llama aberración esférica axial y la distancia FH aberración esférica lateral. Deduzca la fórmula que relaciona las magnitudes de estas aberraciones con el ángulo y con el radio de curvatura del espejo esférico. (Fig. 14-31.)

Solución. Sea x la aberración axial AF y y la aberración lateral FH. Según el triángulo isósceles OAM se tiene que $OA = R/2 \cos \alpha$; pero $x = AF = OA - OF = OA - R/2$, es decir,

$$x = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1\right)$$

Si $\alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$ y $x = 0$, $y = FH = x \operatorname{tg} \sphericalangle HAF$. Pero $\sphericalangle HAF$ es igual al ángulo externo del triángulo OAM y, por consiguiente, igual a 2α; de donde se deduce que:

$$y = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1\right) \operatorname{tg} 2\alpha$$

Si $\alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$, $\operatorname{tg} 2\alpha = 0$ y $y = 0$.

Problema 14-37 La Figura 14-32 indica una barra de vidrio de 10 centímetros de longitud y de radios de curvatura 5 y 10 centímetros, respectivamente; $n' = 1{,}5$. *a*) ¿Cuál es la distancia objeto para la segunda superficie? ¿Es real o virtual? *b*) ¿Cuál es la posición de la imagen formada por la segunda superficie? ¿Tamaño de la imagen?

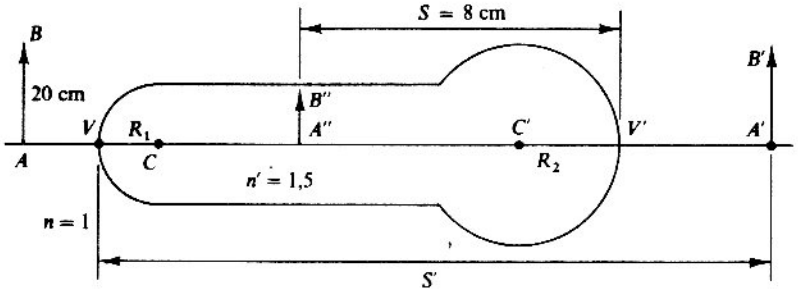


Figura 14-32

Solución. *a*) La distancia objeto para la segunda superficie es la distancia de la imagen para la primera superficie; su posición está dada por:

$$\frac{n}{S} + \frac{n'}{S'} = \frac{n' - n}{R_1}$$

De donde:

$$S' = n'\left[\frac{SR_1}{S(n' - n) - nR_1}\right] = 1{,}5\left[\frac{20(5)}{20(0.5) - 5}\right] = 30 \text{ cm}$$

Por consiguiente, la distancia del objeto para la segunda superficie es $S = VV' - S' = 10 - 30 = -20$ cm. El objeto para la segunda superficie es virtual porque S es negativa.

b) La posición de la imagen formada por la segunda superficie está dada por:

$$\frac{n'}{S} + \frac{n}{S'} = \frac{n - n'}{R_2}$$

de donde:

$$S' = n\left[\frac{SR_2}{S(n - n') - n'R_2}\right] = 1\ \frac{(-20)(-10)}{-20(0{,}5) - (1{,}5)(-10)} = 8 \text{ cm}$$

Como S' es positiva (superficie cóncava), la imagen es real.

El tamaño es $m = S'/S = 8/-20 = -0{,}4$, invertida; entonces la altura de esta imagen es 1 mm − 0,4 mm = 0,6 mm.

Problema 14-38 Dos espejos se colocan como lo indica la Figura 14-33 y están separados entre sí 40 centímetros. Se coloca un objeto entre ellos y su imagen aparece de nuevo en el punto medio de los dos espejos. Uno de ellos es cóncavo y su radio de curvatura es de 30 centímetros. ¿Qué tipo de espejo es el otro? ¿Cuál es el tamaño de la imagen?

Solución. Para el espejo cóncavo tenemos que $1/S + 1/S' = 2/R = 1/f_1$, y remplazando los datos:

$$\frac{1}{S_1'} = \frac{1}{15} - \frac{1}{20} = \frac{1}{60 \text{ cm}} \quad \therefore S_1' = 60 \text{ cm}$$

Lo cual dice que el primer espejo forma una imagen real en I_1, que a su vez actúa como objeto virtual para el segundo, produciendo una imagen real en I_2.

Para el segundo espejo: $1/S_2 + 1/S_2' = 2/R_2 = 1/f_2$. Al remplazar los datos se obtiene:

$$\frac{1}{f_2} = -\frac{1}{20} + \frac{1}{20} = 0 \quad \therefore f_2 = \infty,\ S_2 = (30 - 60) = -30 \text{ cm},\ S_2' = 20 \text{ cm}$$

Es decir, el espejo es plano. El tamaño producido por el primero es:

$$m = -\frac{S_1'}{S_1} = -\frac{60}{20} = -3$$

y el producido por el segundo, 1. Por tanto, el tamaño final es −3.

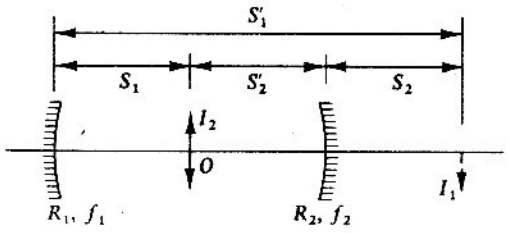


Figura 14-33

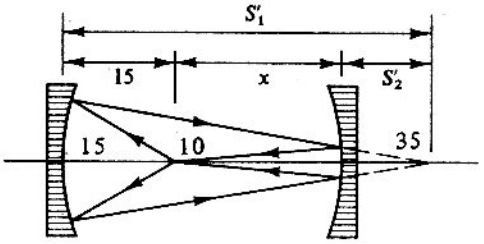


Figura 14-34

Problema 14-39 Se colocan dos espejos de 12 y 14 centímetros de distancias focales el uno frente al otro. Se coloca una luz a 15 centímetros del primero y se varía la posición del segundo hasta que se produzca una imagen real que coincida con el objeto. ¿Dónde está localizada la luz y la distancia entre los espejos? (Fig. 14-34.)

Solución. La imagen producida por el objeto en el primer espejo debe coincidir con la imagen producida por el segundo, porque, de lo contrario, se produce una serie de imágenes. Ninguna otra imagen real se forma. Aplicando la fórmula de los espejos al primero se obtiene:

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{S'_1} = \frac{1}{12} \quad \therefore \frac{1}{S'_1} = \frac{1}{60} \quad \therefore S'_1 = 60 \text{ cm}$$

Para el segundo espejo un objeto real situado a una distancia x del vértice produce una imagen virtual a la distancia $(15 + x - 60)$. Así,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{(45 - x)} = \frac{1}{14} \quad \therefore 45x - x^2 = 14(45 - 2x) \quad \therefore x^2 - 73x + 630 = 0 \quad \therefore (x - 63)(x - 10) = 0$$

La solución $x = 63$ cm no sirve porque corresponde a dos espejos, cada uno de los cuales forma una imagen real situada entre ellos distinta al objeto. La separación de los espejos es de $15 + 10$ cm.

Problema 14-40 La Figura 14-35 muestra un espejo cóncavo horizontal. Si una luz se coloca a 30 centímetros por encima del espejo, se observa que su imagen se halla en el mismo punto. Si se coloca una película de líquido sobre el espejo, se observa que hay necesidad de bajar la luz 8 centímetros para que coincida con su imagen. Halle el índice de refracción del líquido.

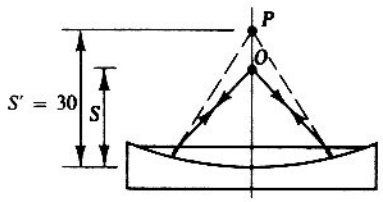


Figura 14-35

Solución. Según el enunciado del problema, $S = S' = R = 30$ cm, al poner el líquido sobre el espejo. La trayectoria marcada con una recta continua indica el recorrido que hace un rayo de luz al refractarse en el líquido. Los rayos son normales a la superficie del espejo. Al refractarse el rayo en la superficie plana, $S = 22$ centímetros y la distancia de la imagen virtual es $S' = -30$ cm, porque está medida en sentido opuesto al que entran los rayos de luz.

Aplicando la fórmula:

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{S'} = \frac{1 - n}{R}$$

con $R = \infty$ se tiene:

$$\frac{1}{22} - \frac{n}{30} = \frac{1 - n}{\infty} = 0 \quad \therefore n = \frac{30}{22} = 1{,}36$$

Problema 14-41 Halle la ecuación de una superficie aplanética de revolución que separa dos medios homogéneos de índices de refracción n y n', para un par de puntos conjugados P y P' que están sobre el eje de revolución con P en el infinito. Investigue los casos: *a*) $n'^2 > n^2$; *b*) $n'^2 < n^2$; *c*) $n'^2 = n^2$. (Figs. 14-36 y 14-37.)

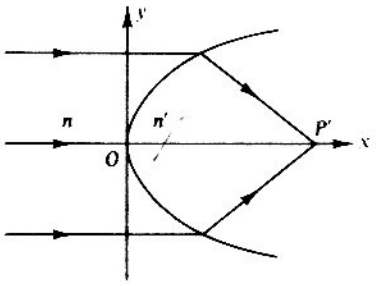


Figura 14-36

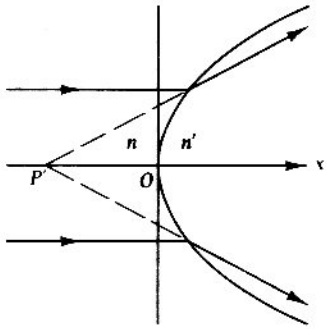


Figura 14-37

Solución. Se toma el eje de revolución como el eje de las x y su punto de intersección con la superficie como el origen. La ecuación de la superficie aplanética es:

$$(n'^2 - n^2)x^2 + n'^2(y^2 + z^2) - 2n'(n' - n)qx = 0$$

siendo q la abscisa del punto P'. Cuando $n'^2 > n^2$ se obtiene un elipsoide de revolución con semiejes:

$$a = \frac{n'}{n' + n}\, q; \quad b = q\sqrt{\frac{n' - n}{n' + n}}$$

y excentricidad:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = n/n' < 1$$

Cuando $n'^2 < n^2$ se obtiene un hiperboloide de revolución de dos secciones con semiejes:

$$a = \frac{n'}{n' + n}\, q; \; b = q\sqrt{\frac{n - n'}{n' + n}}$$

y excentricidad:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = n/n' > 1$$

En este caso, la imagen P' es virtual.

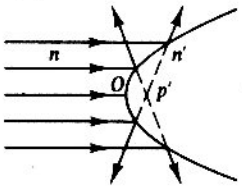


Figura 14-38

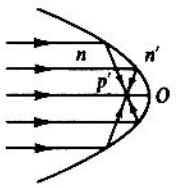


Figura 14-39

El caso $n'^2 - n^2 = 0$ se puede verificar con $n' = n$, que no es de interés, o con $n' + n = 0$. La segunda posibilidad corresponde a una reflexión. En este caso la superficie aplanética es $y^2 + z^2 = 4qx$, que es un paraboloide de revolución con parámetro $p = 2q$ (espejo parabólico). Cuando $q > 0$, la imagen P' es virtual (Fig. 14-38); cuando $q < 0$, es real (Fig. 14-39).

Problema 14-42 Partiendo de la ley de Snell para la refracción y empleando las propiedades geométricas de la elipse y la hipérbola muestre: *a*) que un haz de rayos que incide en un elipsoide de revolución, y paralelo a su eje, converge en el foco posterior del elipsoide si el índice de refracción del mismo, relativo al medio que lo rodea, es $n = 1/e$, siendo e la excentricidad del elipsoide; *b*) que un haz de rayos que incide en una de las secciones de un hiperboloide de dos secciones y paralelo a su eje se transforma después de refractarse en un haz divergente y su continuación se corta en el foco posterior del hiperboloide, si el índice de refracción del hiperboloide relativo al medio que lo rodea es $n = 1/e$. Compare con el problema anterior.

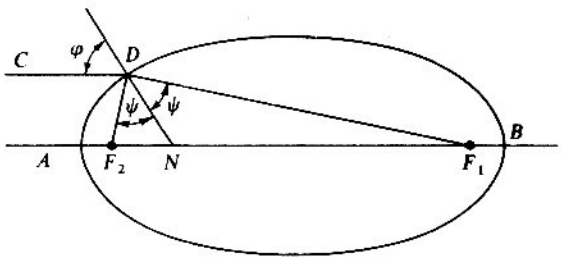


Figura 14-40

Solución. *a*) Dibuje una recta CD paralela al eje mayor AB de la elipse (Fig. 14-40). Su punto de intersección D con la elipse se une con los focos F_1 y F_2. Si DN es la normal a la elipse, entonces:

$$\sphericalangle F_1DN = \sphericalangle F_2DN. \text{ Además, } \sphericalangle DNF_2 = \varphi$$

Aplicando el teorema del seno a los triángulos F_1DN y F_2DN se obtiene:

$$\frac{F_1D}{F_1N} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\psi}; \quad \frac{F_2D}{F_2N} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\psi}$$

Así,

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\psi} = \frac{F_1D + F_2D}{F_1N + NF_2} = \frac{AB}{F_1F_2}$$

Es obvio que el índice de refracción del elipsoide relativo al medio que lo rodea es $n = AB/F_1F_2 = 1/e$, y si el rayo que incide sigue la trayectoria CD, el rayo refractado sigue a lo largo de DF_1.

b) Este caso se considera de la misma manera.

Problema 14-43 Una superficie de revolución separa dos medios de índices de refracción n y n' y tiene la propiedad de que los rayos que salen de un punto P sobre el eje de revolución convergen en otro punto P', también sobre el eje de revolución; se llama un óvalo cartesiano. Halle la ecuación de la sección de esta superficie por un plano que pasa por el eje de revolución PP'.

Solución. Tome el eje X coincidente con PP'. El origen se toma en el punto de intersección del óvalo cartesiano con su eje a lo largo del eje X.

El óvalo cartesiano es una superficie aplanética relativa a los puntos P y P'; por tanto, la ecuación de su intersección con el plano xy es:

$$n\sqrt{(x-q)^2 + y^2} + n'\sqrt{(x-q')^2 + y^2} = n'q' - nq \tag{1}$$

$$\therefore (n^2 - n'^2)(x^2 + y^2) + 4(n^2 - n'^2)(n'^2q' - n^2q)(x^2 + y^2)x + 4mn'(nq - n'q')(nq' - n'q)(x^2 + y^2) + \\ + 4(n'^2q' - n^2q)x^2 + 8mn'(n' - n)(nq - n'q')qq'x = 0$$

Si $n^2 - n'^2 = 0$, esta ecuación se transforma en una ecuación de segundo grado. Esto puede ocurrir con $n - n' = 0$, que no es de interés, o con $n + n' = 0$. En el segundo caso, (1) se transforma en:

$$4qq'x^2 + (q + q')y^2 - 4qq'(q + q')x = 0 \tag{2}$$

Si se introducen las nuevas coordenadas ξ y η con el origen en el punto medio de PP', se tiene:

$$x = \xi + \frac{q + q'}{2}, \quad y = \eta$$

y la ecuación de la curva (2) se transforma en:

$$\xi^2 \Big/ \left(\frac{q + q'}{2}\right)^2 + \frac{\eta^2}{qq'} = 1 \tag{3}$$

Cuando $qq' > 0$, (3) es la ecuación de una elipse y sus focos son conjugados con P y P' (espejo elipsoidal). Cuando $qq' < 0$, (3) es la ecuación de una hipérbola con focos en P y P' (espejo hiperboloidal).

Reflexión

Problema 14-44 Un hombre de 1,8 metros de estatura está parado a 2,4 metros de un espejo plano. Sus ojos están a 1,7 metros por encima del piso. ¿Cuál es el espejo más corto que permite que vea su reflexión completa? ¿A qué distancia del piso se debe colocar? (Fig. 14-41.)

Solución. Si los ojos del hombre están en B puede ver la imagen de sus pies en I y la imagen de su cabeza en G a lo largo de los rayos BFI y BDG, respectivamente. Entonces el espejo mínimo que necesita está representado por la recta DF. JF dice la distancia a la cual debe ser colocado el espejo. Según la Figura 14-41, los triángulos BHI y BFE son semejantes; por tanto, $BH/BE = HI/EF$. Vemos que $BH = 4{,}8$ m y $HI = 1{,}8$ m; por consiguiente,

$$\frac{4{,}8\text{ m}}{2{,}4\text{ m}} = \frac{1{,}7\text{m}}{EF} \quad \therefore\ EF = \frac{1{,}7\text{m}}{2} = 0{,}85\text{m}$$

Además, los triángulos BGH y BED son semejantes; entonces: $BH/BE = GH/ED$. Como $BH = 4{,}8$ m y $BE = 2{,}4$ m, entonces:

$$\frac{4{,}8\text{ m}}{2{,}4\text{ m}} = \frac{0{,}10\text{ m}}{ED} \quad \therefore\ ED = 0{,}05\text{ m}$$

Ahora, $DF = DE + EF = 0{,}05 + 85 = 90$ cm, que es la altura mínima del espejo que se pide.

Finalmente, el triángulo BCI es semejante al triángulo FJI; por tanto, $BC/CI = FJ/JI$; $BC = 1{,}7$ m, $CI = 9{,}8$ m y $JI = 2{,}4$ m; entonces:

$$\frac{1{,}7\text{ m}}{4{,}8\text{ m}} = \frac{FJ}{2{,}4\text{ m}} \quad \therefore\ FJ = 0{,}85\text{ m}$$

Es decir, el espejo se debe colocar a 0,85 m por encima del piso.

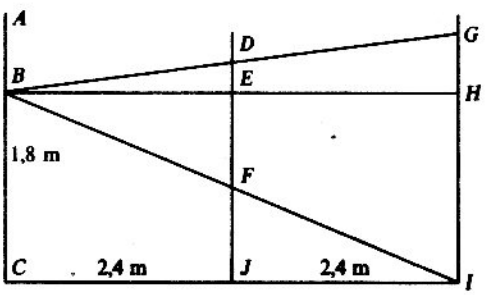


Figura 14-41

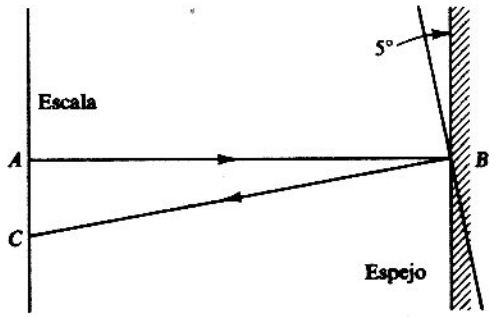


Figura 14-42

Problema 14-45 Un rayo de luz choca con un espejo fijado a un galvanómetro de bobina y se refleja en una escala paralela al espejo. Si la escala está a 6 metros del espejo, ¿cuánto se moverá el punto sobre la escala cuando una corriente que pasa por el galvanómetro produce una rotación del espejo de 5°? (Fig. 14-42.)

Solución. Como el espejo ha girado 5°, el rayo se ha desplazado 10° de la trayectoria BA a la trayectoria BC. Como el triángulo ABC es recto se puede calcular la distancia AC, que es la distancia que el rayo se desplaza sobre la escala.

La tangente del ángulo $ABC = AC/AB = \text{tg } 10° = 0{,}176$. Entonces:

$$AC = AB \cdot (0{,}176) = 6 \cdot 0{,}176 = 1{,}056 \text{ m}$$

Por tanto, el punto se desplaza sobre la escala una distancia igual a 1,056 m.

Problema 14-46 Un haz de luz pasa del agua al aire. Si el ángulo de incidencia es de 30°, ¿cuál es el ángulo de refracción? Indice de refracción del agua, 1,33.

Solución. El índice de refracción del agua representa la relación del seno del ángulo de incidencia en el aire al seno del ángulo de refracción en el agua. Como se va a invertir la dirección se debe usar la recíproca. Así,

$$\text{índice de refracción (del agua al aire)} = 1/1{,}33 = 0{,}75$$

Entonces:

$$\text{índice de refracción} = \text{sen } i/\text{sen } r = 0{,}75 = \text{sen } 30°/\text{sen } r$$

Por tanto:

$$\text{sen } r = \text{sen } 30°/0{,}75 = 0{,}5/0{,}75 = 0{,}667 \quad \therefore\ r = 41{,}8°$$

que es el ángulo de refracción.

Problema 14-47 La velocidad de la luz es de $3 \cdot 10^8$ metros/segundo en el aire. ¿Cuál es su velocidad en el vidrio de índice de refracción 1,6?

Solución. Indice de refracción $= \dfrac{\text{velocidad de la luz en el aire}}{\text{velocidad de la luz en el vidrio}}$. Entonces, velocidad de la luz en el aire = velocidad de la luz en el aire/índice de refracción $= (3 \cdot 10^8 \text{ m/seg})/1{,}6 = 1{,}88 \cdot 10^8$ m/seg.

Problema 14-48 El índice de refracción de la luz al pasar del aire al agua es 1,33; del aire al vidrio, 1,5. Halle el índice de refracción del agua al vidrio.

Solución. Sea n_{av} = índice de refracción del aire al vidrio; n_{aa} = índice de refracción del aire al agua; c_a = velocidad de la luz en el aire; nc_{ag} = velocidad de la luz en el agua; nc_v = velocidad de la luz en el vidrio.

Tenemos que:

$$n_{av} = \frac{c_a}{c_v} \quad \text{y} \quad n_{aa} = \frac{c_a}{c_{ag}}$$

Dividiendo estas dos expresiones se obtiene:

$$\frac{n_{av}}{n_{aa}} = \frac{\dfrac{c_a}{c_v}}{\dfrac{c_a}{c_{ag}}} = \frac{c_{ag}}{c_v} = n_{av}$$

Entonces:

$$n_{av} = \frac{n_{av}}{n_{aa}} = \frac{1{,}5}{1{,}33} = 1{,}13$$

Problema 14-49 Un niño está situado simétricamente al frente de un espejo con bordes oblicuos. Ve tres imágenes de sus ojos cuando está situado a 90 centímetros del espejo. El espejo tiene 80 centímetros de ancho y el índice de refracción del vidrio es 1,54. ¿Cuál es el ángulo de los bordes?

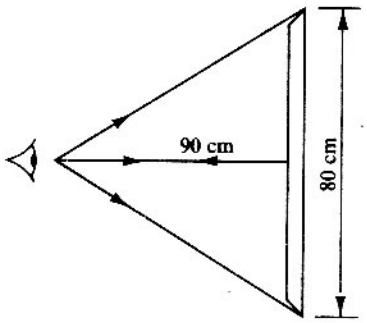


Figura 14-43

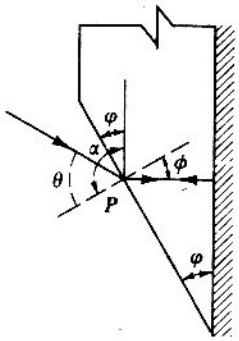


Figura 14-44

Solución. La Figura 14-43 muestra la trayectoria que siguen los rayos de luz en la parte central y cuándo alcanzan los bordes del espejo. Las imágenes exteriores se forman al tocar los rayos el punto P formando un ángulo de incidencia θ y uno de refracción ϕ. ϕ es igual a φ (Fig. 14-44). Se dibuja una recta por P paralela a la base del espejo. Ahora,

$$\operatorname{sen}\theta = n \operatorname{sen}\phi = n \operatorname{sen}\varphi \quad \text{y} \quad \alpha = \varphi + (90 - \theta)$$

Por tanto,

$$\operatorname{sen}[(90 - (\alpha - \varphi)] = n \operatorname{sen}\varphi \quad \therefore \cos\alpha\cos\varphi + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi = n \operatorname{sen}\varphi$$

Dividiendo esta última expresión por $\cos\varphi$ se obtiene:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos\alpha}{n - \operatorname{sen}\alpha}. \quad \text{Además,} \quad \alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{90}{80} = \operatorname{arc\,tg}\,1.12$$

de donde:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{0{,}6648}{1{,}54 - 0{,}747} = 0{,}838 \quad \therefore \varphi \approx 40^\circ$$

que es el ángulo de los bordes del espejo.

Problema 14-50 En el centro de una habitación cuadrada de 25 metros de superficie hay colgada una lámpara. Suponiendo que esta lámpara es un foco luminoso puntual, halle a qué altura sobre el suelo deberá encontrarse para que la iluminación en los rincones de la habitación sea la mayor posible.

Solución. La iluminación en los ángulos de la habitación será $E = \frac{I}{r^2}\cos\alpha$.

Entre la distancia r que hay desde la lámpara hasta el rincón de la habitación la magnitud a, igual a la mitad de la diagonal del suelo cuadrado, el lado b de este suelo y la altura h a que se encuentra la lámpara sobre el suelo, existe evidentemente la relación siguiente:

$$a = r \operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{\sqrt{2}} = h \operatorname{tg}\alpha$$

Basándonos en esta última expresión, la iluminación toma la forma siguiente:

$$E = \frac{I}{a^2}(\cos\alpha \operatorname{sen}^2\alpha)$$

Para hallar el máximo de E tomaremos la derivada $dE/d\alpha$ y la igualamos a cero:

$$dE/d\alpha = \frac{1}{a^2}(2\cos^2\alpha \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}^3\alpha) = 0$$

de donde $\operatorname{tg}^2\alpha = 2$. Por tanto, la altura que buscamos será:

$$h = a/\operatorname{tg}\alpha = b/\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha = b/2 = 2{,}5 \text{ m}$$

Problema 14-51 Pruebe geométricamente que si un rayo de luz sale de un punto A y pasa por B, después de reflejarse en un espejo plano, la longitud de la trayectoria del rayo es menor que la longitud de cualquier otra trayectoria que pasa desde A al espejo y después a B. (Fig. 14-45.)

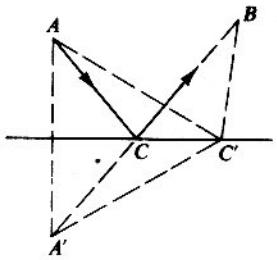


Figura 14-45

Solución. Según la ley de la reflexión de la luz, la continuación del rayo reflejado CB corta la perpendicular AA' al plano del espejo en el punto A', que está a la misma distancia del plano que el punto A. Así, $A'C = AC$, y la longitud de la trayectoria de la luz ACB es igual a la longitud de la recta $A'B$. Si la luz viajara a lo largo de la trayectoria $AC'B$, la longitud de esta trayectoria sería igual a la longitud de $A'C'B$. Comparando la longitud de $A'C'B$ a la longitud de $AC'B$ se obtiene:

$$AC + CB \leq A'C' + C'B$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determine la distancia a que un avión situado a 3000 metros de altura ve un submarino que navega a 100 metros de profundidad. Indice del agua, 1,5.
2. En un prisma de índice $n = \sqrt{2}$ y 60° de abertura calcule la desviación que experimenta un rayo que incide con $i = 45°$ y la desviación mínima.
3. Un dióptrico cóncavo separa dos medios de $n_1 = 2$ y $n_2 = 1{,}6$. Si el radio vale 20 centímetros, determine la imagen de un objeto situado en el primer medio, a 3 metros del dióptrico.
4. Una capa de agua de 4 cm de espesor flota en un líquido de índice de refracción 1,46 de 6 cm de espesor. ¿A qué profundidad parece estar el fondo?
5. Un prisma 45° – 45° – 90°e está sumergido totalmente en agua ¿Cuál debe ser el índice de refracción mínimo del prisma para que un rayo que incide normalmente a uno de las caras menores, se refleje totalmente?
6. Un objeto de 2 cm de altura se coloca a 30 cm. delante del vértice de un espejo cóncavo de radio de 80 cm. Determinar: posición, naturaleza y tamaño de la imagen. *b*) Lo mismo si el espejo es convexo.

CAPITULO 15

Lentes

Lentes esféricas. Un medio transparente limitado por dos superficies esféricas se denomina lente. La recta que une los centros de curvatura de las dos caras es el eje óptico.

Las características de una lente están determinadas por el valor y signo de sus radios de curvatura R_1 y R_2, por la distancia que separa los polos de sus dos caras y por el índice de refracción n del medio que las constituye. De acuerdo con el valor relativo de los radios de curvatura resultan los seis tipos de lentes que representa la Figura 15-1.

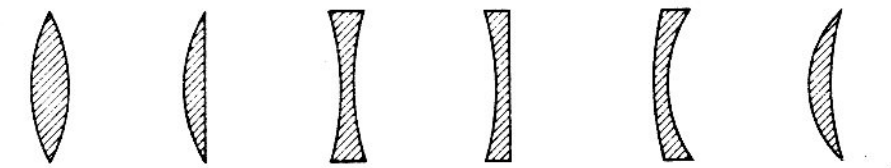


Figura 15-1

Leyes de las lentes. Para las lentes delgadas, en función de la distancia del objeto a la lente S_1 y la distancia S_2 de ésta a la imagen, siendo f la distancia focal:

$$\frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_1} = \frac{1}{f} \tag{15-1}$$

Aumento. El *aumento* de una lente puede ser *lineal* o *angular.* El primero es la relación entre el tamaño de la imagen y el del objeto:

$$\frac{y'}{y} = \frac{S_2}{S_1} \tag{15-2}$$

El aumento *angular* γ es la relación entre el ángulo α', bajo el que se ve la imagen, y el α, bajo el cual se ve el objeto.

$$\gamma = \frac{\alpha'}{\alpha} \tag{15-3}$$

Fórmula de construcción de lentes. La distancia focal está relacionada con los radios de curvatura de las caras y con el índice de refracción por la ecuación:

$$\frac{1}{f} = \left(n - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

La potencia de una lente es la inversa de la distancia focal. Cuando ésta se expresa en metros la unidad de potencia es la dioptría.

Instrumentos ópticos. Bajo esta denominación se incluyen todos los sistemas de lentes o espejos, pudiendo clasificarse en instrumentos de aumento (lupa), aproximación (anteojos), captación (cámara fotográfica) y proyección (proyectores en general).

Todos los problemas sobre instrumentos ópticos se resuelven hallando la imagen producida por el primer elemento del sistema y considerándola respecto al inmediato elemento como objeto. Esta regla se repite hasta agotar todos los elementos.

Signos convencionales

Las Figuras 15-2 y 15-3 muestran los convenios de signos para las lentes positivas y negativas.

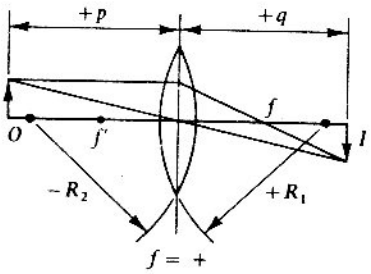


Figura 15-2

Izquierda	Derecha
$+p$	$q+$
$+q$	$p-$
$+R$	$R-$
(converge) $+f$	$f-$ (diverge)

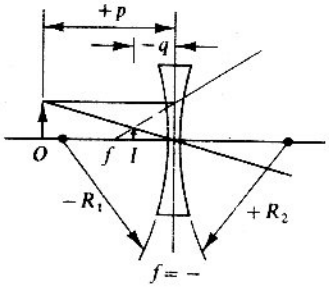


Figura 15-3

La Tabla 15-1 es el resumen correspondiente a la Figura 15-4 para las distintas posiciones de la imagen de un objeto de altura constante, y colocado en las posiciones que se indican, para una lente positiva.

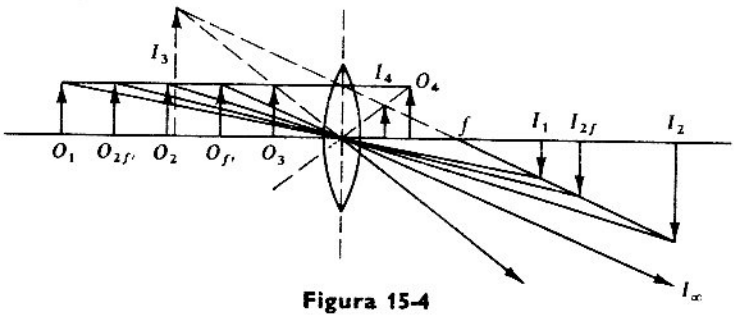


Figura 15-4

Tabla 15-1

Objeto	Posición del objeto	Posición de la imagen	Tamaño	Real o virtual	Derecha o invertida
O_∞	$+\infty$	f	un punto	real	–
O_1	$+\infty \rightarrow 2f'$	$f \rightarrow 2f$	más pequeña	real	invertida
O_{2f}	$2f'$	$2f$	igual	real	invertida
O_2	$2f' \rightarrow f'$	$2f \rightarrow -\infty$	mayor	real	transición
$O_{f'}$	f'	$-\infty$	mayor	transición	derecha
O_3	$f' \rightarrow v$	$-\infty \rightarrow v$	mayor	virtual	derecha
O_4	$v \rightarrow -\infty$	$v \rightarrow f'$	más pequeña	real	

La Tabla 15-2 es el resumen correspondiente a la Figura 15-5, que muestra las distintas posiciones del objeto y su imagen para una lente negativa.

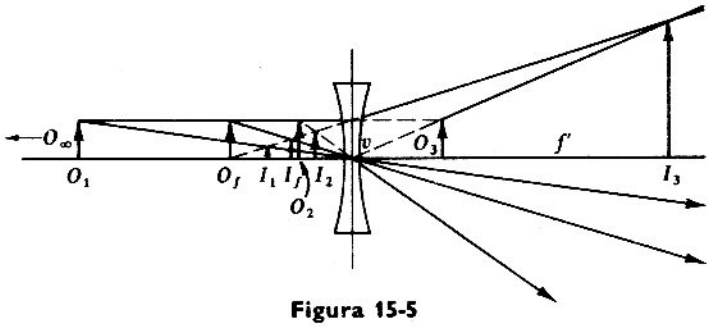


Figura 15-5

Tabla 15-2

Objeto	Posición del objeto	Posición de la imagen	Tamaño	Real o virtual	Derecha o invertida
O_∞	$+\infty$	en f	punto	virtual	punto
O_1	$+\infty \rightarrow v$	$f \rightarrow v$	más pequeña	virtual	derecha
O_f	f	$f/2$	más pequeña	virtual	derecha
O_2	$f \rightarrow v$	$f \rightarrow v$	más pequeña	virtual	derecha
O_3	$v \rightarrow f'$	$v \rightarrow -\infty$	más grande	real	

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 15-1 Un objeto de 10 centímetros se coloca a 20 centímetros delante de una lente convergente de longitud focal 12 centímetros. Halle la posición y tamaño de la imagen.

Solución. Como el objeto está delante de la lente convergente a una distancia mayor que la distancia focal, la imagen debe ser real e invertida.

La distancia al objeto: $p = 20$ cm; la distancia a la imagen: q = distancia focal $= f = 12$ cm. Como:

$$1/p + 1/q = 1/f, \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{20} + \frac{1}{q} = \frac{1}{12} \quad \therefore \frac{1}{q} = \frac{1}{30} \quad \therefore q = 30 \text{ cm}$$

Por tanto, la imagen está al otro lado de la lente y, como es positivo, indica que la imagen es real.

Aumento: $q/p = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$, lo cual indica que el tamaño de la imagen es $\frac{3}{2}$ el tamaño del objeto o sea: 15 cm.

Problema 15-2 Un objeto de 4 centímetros de alto se coloca frente a una lente convergente a 5 centímetros de distancia. La distancia focal de la lente es 6 centímetros. ¿Qué tipo de imagen se forma, su tamaño y en qué punto está localizada?

Solución. Al remplazar los datos del problema en la fórmula $1/p + 1/q = 1/f$, se encuentra que:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{q} = \frac{1}{6} \quad \therefore \frac{1}{q} = -\frac{1}{30} \quad \therefore q = -30$$

esto quiere decir que la imagen está localizada a 30 cm del mismo lado que el objeto y, por tanto, su imagen es virtual.

Su tamaño es: $q/p = 30/5 = 6$ ó $6 \cdot 4 = 24$ cm.

Como el objeto está más cercano de la lente que su distancia focal, la imagen es virtual, derecha, ampliada seis veces y localizada a 30 cm de la lente.

Problema 15-3 Una lupa de vidrio de 4 centímetros de longitud focal se emplea para ampliar un objeto cinco veces. Para obtener dicha ampliación, ¿a qué distancia se debe colocar el objeto?

Solución. Como la ampliación es 5, $q/p = 5$ ó $q = 5p$. Como la lupa es una lente convergente con distancia focal positiva y distancia a la imagen negativa, se tiene:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{4} \quad \text{o} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{-5p} = \frac{1}{4} \quad \therefore 5p = 16 \quad \therefore p = \frac{16}{5}\ \text{cm} = 3{,}2\ \text{cm}$$

Por tanto, la lupa debe estar situada a 3,2 cm del objeto.

Problema 15-4 La longitud focal de una lente convergente es de 15 centímetros. Un objeto de 3 centímetros de altura se coloca sobre el eje principal en varias posiciones, como lo indican las Figuras 15-6 a 15-8. *a*) Halle la posición de la imagen, su tamaño; vea si es real o virtual, invertida o derecha; cuándo el objeto está en el infinito; *b*) a 30 centímetros a la izquierda del vértice; *c*) a 6 centímetros a la izquierda del vértice.

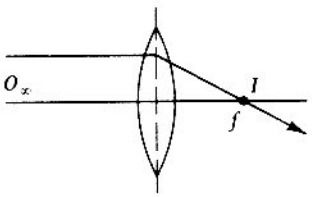


Figura 15-6

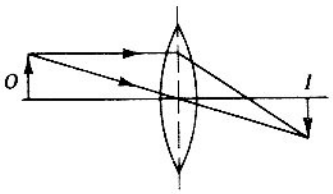


Figura 15-7

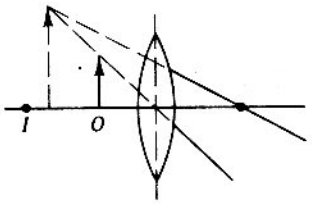


Figura 15-8

Solución. *a*) Objeto en el infinito. La posición de la imagen es:

$$1/p + 1/q = 1/f \quad \text{o} \quad \frac{1}{\infty} + \frac{1}{q} = \frac{1}{15} \quad \therefore q = 15\ \text{cm}$$

La imagen es real y está localizada a la derecha del vértice.

Tamaño:

$$m = -q/p = -\frac{15}{\infty}\ ;\ 0 \cdot 3 = 0\ \text{cm (un punto)}$$

b) Objeto situado a 30 cm. La posición de la imagen es:

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{q} = \frac{1}{15} \quad \therefore q = +30\ \text{cm}$$

La imagen es real y situada a la derecha del vértice.

Tamaño:

$$m = -q/p = -\frac{30}{30}\ ;\ -1x = -1(3) = -3\ \text{cm (invertida)}$$

c) El objeto está situado a 6 cm. La posición de la imagen es:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{q} = \frac{1}{15} \quad \therefore q = -10\ \text{cm}$$

A la izquierda del vértice y virtual.

Tamaño:

$$m = -q/p = -\frac{-10}{6} = \frac{+5}{3}\ ;\ 1{,}6x = 1{,}6(3) = 4{,}8\ \text{cm (derecha)}$$

Problema 15-5 La longitud focal de una lente divergente es de 25 centímetros. Un objeto de 6 centímetros de altura se coloca en el eje principal, en las posiciones que indican las Figuras 15-9 a 15-11. Halle la posición de la imagen, qué clase de imagen y si es derecha o invertida, cuando el objeto está: *a*) en el infinito; *b*) 45 centímetros a la izquierda del vértice; *c*) a 20 centímetros y a la izquierda del vértice.

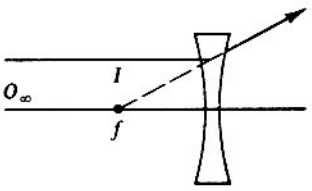


Figura 15-9

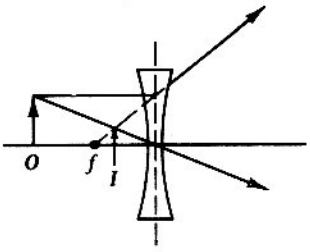


Figura 15-10

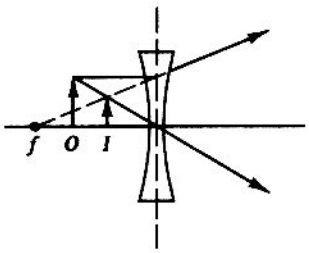


Figura 15-11

Solución. *a*) El objeto está en infinito. La posición de la imagen es:

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{q} = \frac{1}{-25} \quad \therefore q = -25 \text{ cm}$$

La imagen es virtual y está dada a la izquierda del vértice.

Tamaño:

$$m = -q/p = -\frac{-25}{\infty} = 0(2) = 0 \text{ (punto)}$$

b) El objeto está a 45 cm. La posición de la imagen está dada por:

$$\frac{1}{45} + \frac{1}{q} = -\frac{1}{25} \quad \therefore q \approx -16 \text{ cm}$$

La imagen es virtual y está a la izquierda del vértice.

Tamaño:

$$m = -q/p = -\frac{16}{45} \; ; \; -0{,}35x = -0{,}35(2) = 0{,}7 \text{ cm}$$

c) El objeto está a 20 cm. La posición de la imagen está dada por:

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{q} = \frac{1}{-25} \quad \therefore \frac{1}{q} = -\frac{9}{100} \quad \therefore q = -11{,}1 \text{ cm}$$

La imagen es virtual y está localizada a la izquierda del vértice.

Tamaño:

$$m = -q/p = -\frac{-11{,}1}{20} \; ; \; 0{,}55x = 0{,}55(2) = 1{,}10$$

Problema 15-6 Deduzca la ecuación de las lentes delgadas. (Fig. 15-12.)

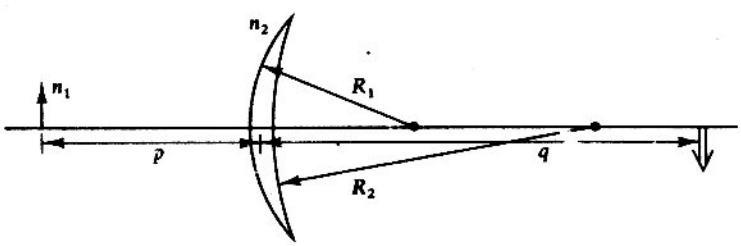


Figura 15-12

Solución. La imagen formada por la primera superficie está a una distancia q_a de la superficie:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q_a} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}$$

Por tanto,

$$\frac{n_2}{q_a} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} - \frac{n_1}{p}$$

Ahora, la segunda superficie de radio R_2 emplea esta imagen como su objeto, que es virtual. Por tanto, se debe tomar la distancia al objeto como negativa. Sea q la distancia de la imagen a esta superficie y si se supone que la distancia que separa las superficies es pequeña, se tiene que:

$$\frac{n_2}{-p_a} + \frac{n_1}{q} = \frac{n_1 - n_2}{R_2}$$

Remplazando en esta ecuación el valor hallado para n_2/q_a se tiene:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_1}{q} = (n_1 - n_2)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

De donde:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \tag{1}$$

Nota. Si el objeto está a una distancia infinita de la lente, los rayos son paralelos y la ecuación anterior se convierte en:

$$\frac{1}{q} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{f}$$

Esta ecuación define la longitud focal de una lente. Si uno de los factores que está entre paréntesis es negativo, q y f son negativos cuando el objeto está en el infinito. En tal caso la imagen es virtual y la lente diverge la luz. Remplazando f en (1) se obtiene la fórmula para las lentes delgadas:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

Recuerde que f se toma positiva para una lente convergente y negativa para una lente divergente.

Problema 15-7 La longitud focal de una lente delgada es -8 centímetros, y su índice de refracción, 1,6. ¿Cuál es su longitud focal en la glicerina, de índice de refracción 1,48?

Solución. Sean: n = índice de refracción de la lente; n_2 = índice de refracción del segundo medio; n_1 = relación de los índices.

Si se conoce la longitud focal, f_a, en el aire, entonces: $1/f_a = (n - 1)(1/R_1 - 1/R_2)$. Si la misma lente se coloca en un segundo medio, de índice de refracción n_2, entonces: $1/f_1 = (n_1 - 1)(1/R_1 - 1/R_2)$ con $n_1 = n/n_2$.

Resolviendo las dos ecuaciones anteriores para $(1/R_1) - (1/R_2)$ e igualando, tenemos que:

$$\frac{1}{f_a(n-1)} = \frac{1}{f_1(n_1 - 1)}, \quad \text{de donde} \quad f_1 = \frac{f_a(n-1)}{n_1 - 1}$$

que es la longitud focal de la lente en el segundo medio.

La relación de los índices de refracción es $n_1 = n/n_2 = 1{,}6/1{,}48 = 1{,}08$. Por consiguiente, la longitud focal de la lente en la glicerina es:

$$f_1 = \frac{f_a(n-1)}{n_1 - 1} = \frac{-8(1{,}6 - 1)}{1{,}08 - 1} = -60 \text{ cm (divergente)}$$

Problema 15-8 Tres lentes delgadas se ponen en contacto para formar una sola lente. Las longitudes focales de las lentes son: -1 centímetro, 4 centímetros y 3 centímetros. ¿Cuál es la longitud focal de la combinación? Halle la posición de la imagen si el objeto está a 1,6 metros a la izquierda del centro de la combinación de las lentes.

Solución. Considerando dos lentes tenemos que la imagen para la primera lente es positiva y se hace negativa cuando se convierte en el objeto para la segunda lente. Entonces, para la primera lente: $1/p_1 + 1/q_1 = 1/f_1$. Si la combinación se considera como una lente delgada y si $q_1 = -p_2$, entonces $p_2 = -q_1$. Para la segunda lente, $1/(-q_1) + 1/q_2 = 1/f_2$. Resolviendo las dos ecuaciones anteriores para $1/q_1$, e igualando, tenemos que:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Esto muestra que la posición inicial del objeto y la posición final de la imagen es función de la suma de las longitudes focales de las lentes separadas.

Aplicando el resultado anterior a tres lentes tenemos que:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{-1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = -\frac{5}{12} \quad \therefore F = -2{,}4 \text{ cm, lente divergente}$$

Potencia en dioptrías:

$$D = \frac{1}{(-2{,}4 \cdot 10^{-2}\ \text{m})} = -41{,}67 \text{ dioptrías, lente divergente}$$

Posición de la imagen:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad \therefore \frac{1}{-2{,}4} = \frac{1}{160} + \frac{1}{q} \quad \therefore q = -2{,}36 \text{ cm}$$

a la izquierda de las lentes.

Problema 15-9 El índice de refracción de una lente es 1,5 y tiene una longitud focal de 20 centímetros en el aire. ¿Cuál es su longitud focal cuando se sumerge en agua?

Solución. La longitud focal de una lente, para este caso, está dada por:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Para $n_1 = 1$ y $f = 20$ cm se obtiene:

$$\frac{1}{20} = \left(\frac{n_2}{1} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Para $n_1 = 1{,}33$ y $f = f_a$ se obtiene:

$$\frac{1}{f_a} = \left(\frac{n_2}{1{,}33} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Dividiendo las dos ecuaciones anteriores, miembro a miembro, se halla:

$$\frac{f_a}{20} = \frac{[\,(n_2/1) - 1\,]}{[(n_2/1{,}33) - 1]} \quad \therefore \frac{f_a}{20 \text{ cm}} = \frac{1{,}5 - 1}{\frac{1{,}5}{1{,}33} - 1} \quad \therefore f_a = 80 \text{ cm}$$

Problema 15-10 Dos lentes delgadas se ponen en contacto. Sus potencias son de $+3$ y -8 dioptrías, respectivamente. ¿Cuál es su potencia y la longitud focal de la combinación? ¿Es convergente o divergente?

Solución. Como las dos lentes están en contacto se puede emplear la fórmula $1/f = 1/f_1 + 1/f_2$. Sabemos que la potencia de la lente es en dioptrías si la longitud focal se da en metros; por tanto, podemos escribir la fórmula anterior en la forma: Potencia de la combinación = potencia de la lente 1 + potencia de la lente 2. Entonces la potencia de la combinación de las dos lentes es $3 - 8 = -5$.

Para calcular la longitud focal de la combinación:

$$\text{potencia} = 1/f = -5 \quad \therefore f = -1/5 = -0{,}2 \text{ m}$$

El signo de la lente indica que la combinación es divergente.

Problema 15-11 Calcule la longitud focal de una lente doblemente convexa de radios de curvatura 20 y 30 centímetros, respectivamente, y cuyo índice de refracción es 1,5.

Solución. Como la lente es doblemente convexa, los radios son positivos. Entonces remplazando estos valores en la ecuación $1/f = (n - 1)(1/R_1 - 1/R_2)$ se obtiene:

$$1/f = (1{,}5 - 1)(1/20 + 1/30) = 0{,}5\,(3/60 + 2/60) = 0{,}5\,(5/60) = 2{,}5/60$$

de donde $f = 24$ cm.

Problema 15-12 Un fabricante de lentes produce una lente plano cóncava cuyo radio de curvatura es de 25 centímetros. Si el índice de refracción de la sustancia es 1,54, ¿cuál es la longitud focal de la lente?

Solución. Como la lente es cóncava, la longitud focal y el radio de curvatura son negativos; entonces, empleando la fórmula $1/f = (n - 1)(1/R_1 - 1/R_2)$, se obtiene:

$$\frac{1}{f} = (1{,}54 - 1)\left(\frac{1}{\infty} + \frac{1}{-25}\right) \quad \therefore \frac{1}{f} = 0{,}54\left(\frac{-1}{25}\right) = -\frac{0{,}54}{25} \quad \therefore f = -46{,}3 \text{ cm}$$

Problema 15-13 Para producir una lente convergente y simétrica de una potencia de 1,25 dioptrías se emplea un trozo de vidrio de índice de refracción 1,5. ¿Cuál es el radio de curvatura de las dos caras de la lente?

Solución. Como la potencia de la lente es de 1,25 dioptrías, $1{,}25 = 1/f$ y $f = 1/1{,}25 = 0{,}8$ m $= 80$ cm. Ahora, empleando la fórmula $1/f = (n - 1)(1/R_1 - 1/R_2)$, con R_1 y R_2 iguales, porque la lente es simétrica, entonces:

$$1/80 = (1{,}5 - 1)(2/R_1) \quad \therefore 1/80 = 1/R_1 \quad \therefore R_1 = 80 \text{ cm}$$

Problema 15-14 Un objeto de 2 centímetros de largo está situado a 50 centímetros de una lente convergente, de longitud focal 10 centímetros. Una segunda lente convergente, de longitud focal 15 centímetros, se coloca a la derecha de la primera lente a una distancia de 37,5 centímetros. *a*) Halle la posición de la imagen final. *b*) ¿Cuál es el tamaño y carácter de la imagen final?

Solución. *a*) La posición de la primera imagen está dada por:

$$1/p_1 + 1/q_1 = 1/f_1, \text{ de donde } 1/q_1 = 1/f_1 - 1/p_1 = 1/10 - 1/50 \quad \therefore q_1 = 12{,}5 \text{ cm}$$

La distancia del segundo objeto:

$$p_2 = 37{,}5 - 12{,}5 = 25 \text{ cm}$$

La posición de la segunda imagen está dada por:

$$1/p_2 + 1/q_2 = 1/f_2, \text{ de donde } 1/q_2 = 1/f_2 - 1/p_2 = 1/15 - 1/25 \quad \therefore q_2 = 37{,}5 \text{ cm}$$

b) El tamaño de la imagen es:

$$m = (-q_1/p_1)(-q_2/p_2) = (12{,}5/50)(37{,}5/25)\ ;\ 0{,}37x = 0{,}375 \cdot 2 = 0{,}75 \text{ cm, recta y real}$$

Problema 15-15 Dos lentes están separadas 22 centímetros. La longitud focal de la primera lente es de 20 centímetros y la longitud focal de la segunda −10 centímetros. El objeto está a 60 centímetros y a la izquierda de la primera lente. *a*) ¿Dónde está localizada la imagen final? *b*) ¿Cuál es el tamaño y carácter de la imagen final? (Fig. 15-13.)

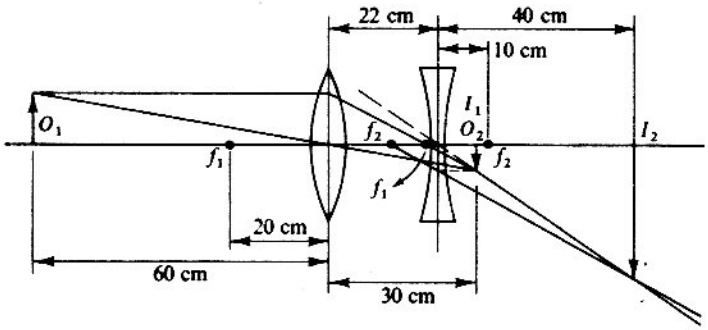


Figura 15-13

Solución. *a*) La posición final de la imagen está dada por $1/p_1 + 1/q_1 = 1/f_1$, de donde:

$$1/q_1 = 1/f_1 - 1/p_1 = 1/20 - 1/60 = 1/30 \quad \therefore q_1 = 30 \text{ cm}$$

Además, $p_2 = 30 - 22 = 8$ cm, a la derecha de la segunda lente, y

$$1/q_2 = 1/f_2 - 1/p_2 = 1/-10 + 1/8 = \frac{1}{40} \quad \therefore q_2 = 40 \text{ cm la imagen es real}$$

Tamaño:

$$m = (-q_1/p_1)(-q_2/p_2) = (-30/60)(-40/-8)\ ;\ -2{,}5x, \text{ la imagen es invertida}$$

Problema 15-16 Una lente convergente tiene una longitud focal de 10 centímetros y se coloca a 30 centímetros y a la izquierda de un espejo cóncavo, de longitud focal 5 centímetros. *a*) Halle la posición final de la imagen si se coloca un objeto a 20 centímetros y a la izquierda de la lente. *b*) ¿Cuál es el tamaño y carácter de la imagen final? (Fig. 15-14.)

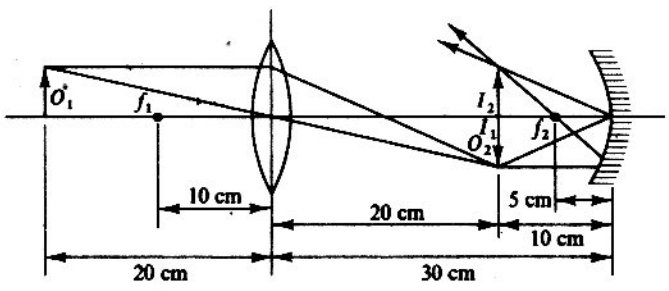


Figura 15-14

Solución. *a*) La posición de la imagen está dada por las siguientes relaciones:

$$1/p_1 + 1/q_1 = 1/f_1, \text{ de donde } 1/q_1 = 1/f_1 - 1/p_1 = 1/10 - 1/20 = \frac{1}{20} \quad \therefore q_1 = 20 \text{ cm}$$

Además, $p_2 = 30 - 20 = 10$ cm y:

$$1/q_2 = 1/p_2 - 1/f_2 = 1/10 - 1/5 \quad \therefore q_2 = -10 \text{ cm}$$

la imagen está a la izquierda del espejo y es real.

b) Tamaño: m = ampliación que produce la lente por la ampliación que produce el espejo:

$$m = (-q_1/p_1)(q_2/p_2) = (-20/20)(-10/10) = 1, \text{ la imagen es derecha}$$

Problema 15-17 Un haz de rayos atraviesa una esfera de vidrio maciza como lo indica la Figura 15-15. *a*) ¿En qué punto convergen los rayos? El radio de la esfera es de 5 centímetros y el índice de refracción del vidrio 1,5. *b*) Si un objeto se coloca sobre el eje de la esfera a 10 centímetros del polo de la superficie (suponga que el hemisferio de la derecha está plateado), calcule la posición de la imagen formada.

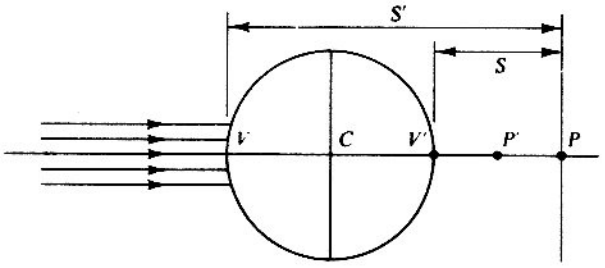


Figura 15-15

Solución. *a*) Para este caso, $S = \infty$, y, por tanto, $n/S + n'/S' = (n - n')/R$, se convierte en $n'/S' = (n' - n)/R$, porque $n/S = 0$, cuando $S = \infty$, de donde:

$$S' = \frac{n'R}{n' - n} = \frac{1{,}5 \cdot 5}{1{,}5 - 1} = 15 \text{ cm para la primera superficie}$$

Si no existiera la segunda superficie los rayos se concentrarían en P. Como hay doble refracción, los rayos se concentran en P'.

De la relación:

$$\frac{n'}{S} + \frac{n}{S'} = \frac{n' - n}{R}$$

se obtiene:

$$S = \frac{nRS}{S(n' - n) - Rn'} = \frac{1 \cdot 5 \cdot (-5)}{(-5)(1{,}5 - 1) - 5(1{,}5)} = \frac{-7{,}5}{-10} = 0{,}75 \text{ cm}$$

lo cual dice que los rayos se concentran en el punto P' situado a una distancia $S' = 0{,}75$ cm fuera de la esfera.

b) De la ecuación $n/S + n'/S' = (n' - n)/R$ para la primera superficie se obtiene $1/2R + 1{,}5/S' = 0{,}5/R$, de donde se obtiene $S = -\infty$.

Para la superficie plateada: $S = 2R - \infty$; en consecuencia, se obtiene:

$$1{,}5/\infty + 1/S' = 0{,}5/R; \quad \therefore S' = 2R$$

O sea, que la imagen final se forma en el vértice de la superficie plateada.

Problema 15-18 Un punto luminoso y una pantalla están separados por una distancia x. Muestre que si una lente convergente de distancia focal f se intercala entre las dos, con $f < x/4$, se produce una imagen real del punto luminoso sobre la pantalla para dos posiciones separadas

por la distancia $d = \sqrt{x(x - 4f)}$, y la relación de los tamaños de las dos imágenes para las dos posiciones de la lente es: $(x - d)^2/(x + d)^2$.

Solución. Para los dos casos se tiene que:

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{S'} = \frac{1}{f} \quad \therefore \frac{SS'}{x} = f \quad \therefore SS' = xf \tag{1}$$

Sea

$$S + S' = x \tag{2}$$

entonces

$$d^2 = (S - S')^2 = (S + S')^2 - 4SS' = x^2 - 4fx$$

Por tanto,

$$d = \sqrt{x(x - 4f)}$$

De (1) y (2) se obtiene:

$$S + \frac{fx}{S} = x \quad \text{o} \quad S^2 - xS + fx = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado tenemos que:

$$S = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4fx}}{2} = \frac{x \pm d}{2}$$

de donde:

$$S_1 = \frac{1}{2}(x - d), \quad S_2 = \frac{1}{2}(x + d) \quad \therefore S_1' = x - S_1 = \frac{1}{2}(x + d) \quad \text{y} \quad S_2' = x - S_2 = \frac{1}{2}(x - d)$$

Es decir, $S_2 - S_1 = d$, y las dos posiciones de la lente están separadas por la distancia $d = \sqrt{x(x - 4f)}$.

Los tamaños son:

$$m_1 = -\frac{S_1'}{S_1} = \frac{y_1}{y} \quad \text{y} \quad m_2 = \frac{S_2'}{S_2} = \frac{S_2}{y}$$

Dividiendo la segunda por la primera se obtiene:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{S_1 S_2}{S_1' S_2} = \frac{\frac{1}{4}(x - d)^2}{\frac{1}{4}(x + d)^2} = \frac{(x - d)^2}{(x + d)^2}$$

Problema 15-19 Un plano grande se fotografía primero en su totalidad y luego por detalles separados a tamaño natural. ¿Cuántas veces mayor será la exposición que hay que dar al fotografiar los detalles de la que se emplea para el plano general?

Solución. Cuando se fotografía todo el plano, cuyas dimensiones son mucho mayores que las de la placa fotográfica, la imagen se forma aproximadamente en el foco imagen del objetivo. Pero cuando se fotografían los detalles para obtener sus imágenes a tamaño natural hay que colocar el objeto a una distancia del objetivo igual al doble de la distancia focal de éste (y a esta misma distancia del objetivo se forma la imagen sobre la placa). El área de la imagen aumenta en este caso $(2F/F)^2 = 4$ veces. La iluminación que recibe la placa fotográfica será este mismo número de veces menor; por consiguiente, el tiempo de exposición deberá ser 4 veces mayor.

Problema 15-20 La formación de una imagen clara de un objeto situado en el infinito para un ojo está a 30 centímetros de él. *a*) ¿Cuál es la longitud focal de una lente para ver un objeto con claridad a 80 centímetros? *b*) La formación de una imagen clara cerca del ojo está localizada a 50 centímetros de él.¿Cuál debe ser la longitud focal de una lente para ver un objeto claramente a 30 centímetros? (Fig. 15-16.)

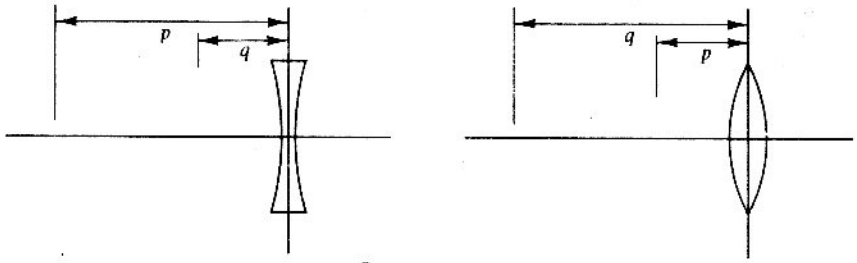


Figura 15-16

Solución. *a*) Como $1/f = 1/p + 1/q = 1/80 + 1/-30$, se obtiene al resolver la ecuación que $f = -48$ cm (divergente).

b) Al remplazar los datos en la ecuación $1/f = 1/q + 1/p$ se obtiene:

$$1/f = 1/30 + 1/-50, \text{ de donde } f = 75 \text{ cm (convergente)}$$

Problema 15-21 Una persona vieja puede ver sin anteojos los objetos localizados entre 60 centímetros y 2 metros. ¿Qué tipo de anteojos necesita para poder ver objetos distantes y poder leer el periódico a 30 centímetros? ¿Qué parte del periódico ve mientras lee? (Fig. 15-17.)

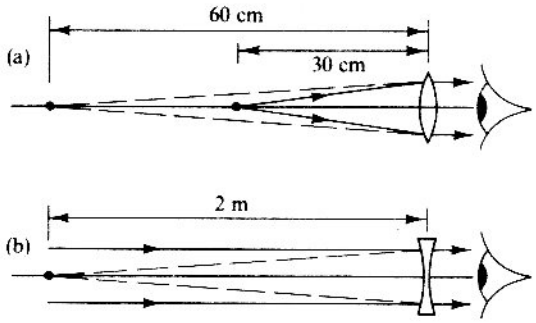


Figura 15-17

Para que la persona pueda ver a 30 cm necesita una lente para que cuando un objeto real se sitúe a 30 cm, la lente produzca una imagen virtual a 60 cm. Empleando la fórmula $1/f = 1/p + 1/q$ se obtiene:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{30} - \frac{1}{60} = \frac{1}{60} \quad \therefore f = 60 \text{ cm}$$

que es la distancia focal de la lente que necesita.

Como no puede ver claramente a grandes distancias, necesita una lente para que cuando se coloque un objeto en el infinito produzca una imagen virtual a 2 m. Por tanto,

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{200} \quad \therefore f' = -2 \text{ m}$$

Esto nos dice que necesita un par de lentes bifocales; la parte superior de la lente debe ser una lente divergente de longitud focal -2 m, y la parte inferior una lente convergente de longitud focal 60 cm.

Cuando el viejo mira por la parte divergente de la lente, ve claramente los objetos situados entre 60 cm y 2 m. Los objetos situados en el infinito producen una imagen virtual situada a 2 m. Una imagen virtual se produce a 60 cm por un objeto situado a una distancia x de la lente con:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{60} = -\frac{1}{200} \quad \therefore x = 87{,}5 \text{ cm}$$

Entonces, todos los objetos situados entre infinito y 87,5 cm los ve con claridad cuando mira por la parte superior de la lente.

En forma análoga, para la parte inferior de la lente ve con claridad los objetos situados entre 30 cm y la distancia y. El objeto en y produce una imagen virtual situada a 2 m. Entonces:

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{200} = \frac{1}{60} \quad \therefore y = 46{,}15 \text{ cm}$$

Esto nos dice que ve con claridad todos los objetos situados entre 30 cm y 46,15 cm, cuando mira por la parte inferior de la lente.

Los objetos situados entre 46,15 y 87,5 cm no los puede ver.

Problema 15-22 En la pared de un acuario está fijada una lente para ver ampliados los peces que se encuentran en su interior. *a*) Muestre que las dos distancias focales de la lente son diferentes y que la fórmula de la lente en este caso es: $f/p + f'/q = 1$. *b*) Si $R_1 = 15$ centímetros y $R_2 = 10$ centímetros, y los índices de refracción del agua y el vidrio son 1,5 y 1,33, respectivamente, el pez ve una persona situada a 30 centímetros de la lente. ¿En qué punto está la imagen que ve el pez y cuál es la ampliación angular que ha producido la lente?

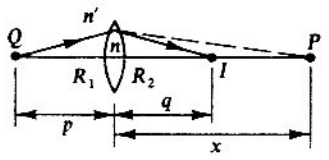


Figura 15-18

Solución. *a*) Observando la Figura 15-18 vemos que se forma una imagen real en P, en ausencia de cualquier otra superficie. Entonces:

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{x} = \frac{(n-1)}{R_1}$$

P actúa como objeto virtual para la refracción en la segunda superficie de radio de curvatura $-R_2$, que separa el vidrio y el agua del índice de refracción n'. Una imagen real se forma finalmente en I. Así:

$$-\frac{n}{x} + \frac{n'}{q} = \frac{n' - n}{-R_2} = \frac{n - n'}{R_2} \quad \therefore \frac{1}{p} + \frac{n'}{q} = \frac{n-1}{R_1} + \frac{n-n'}{R_2}$$

Si O está en el infinito, por definición I coincide con el segundo punto focal de la lente. Entonces:

$$\frac{1}{\infty} + \frac{n'}{f'} = \frac{n-1}{R_1} + \frac{n-n'}{R_2} \quad \therefore \frac{1}{f'} = \frac{1}{n'}\left(\frac{n-1}{R_1} + \frac{n-n'}{R_2}\right)$$

Si Q está en F, el primer punto focal, entra un haz paralelo de rayos al agua. Es decir, si I está en infinito:

$$\therefore \frac{1}{f} + \frac{n'}{\infty} = \frac{n-1}{R_1} + \frac{n-n'}{R_2} \quad \therefore \frac{1}{f} = \frac{n-1}{R_1} + \frac{n-n'}{R_2}$$

Así $f/f' = 1/n'$, y las longitudes focales son diferentes. Si:

$$\frac{n-1}{R_1} + \frac{n-n'}{R_2} = H \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{p} + \frac{n'}{q} = H \quad \therefore \frac{1}{pH} + \frac{n'}{qH} = 1$$

Como $1/f = H$ y $n'/f' = H$, entonces: $f/p + f'/q = 1$.

b) Remplazando los datos en la fórmula anterior se obtiene:

$$\frac{1}{f'} = \frac{3}{4}\left(\frac{1{,}5 - 1}{15} + \frac{1{,}5 - 1{,}33}{10}\right) = \frac{1}{80\text{ cm}} \quad \therefore f' = 80\text{ cm}$$

Como $f/p + f'/q = 1$, entonces:

$$\frac{60}{30} + \frac{80}{q} = 1 \quad \therefore q = -80\text{ cm}$$

Es decir, el pez ve a la persona situada a una distancia de 80 cm más allá de la lente. El tamaño producido por la primera superficie es $m_1 = -x/np$, y por la segunda superficie, $m_2 = nq/n'p$. La ampliación total es $m = m_1 m_2 = -\frac{q}{n'p}$. Si la altura del hombre es h, la altura de su imagen es $-qh/n'p$. Así:

$$u' = -\frac{qh}{n'p} \cdot \frac{1}{-q} = -\frac{h}{n'p}$$

y como, por definición, $u = \frac{h}{25}$ cm, la ampliación angular es:

$$M = \frac{u'}{u} = \frac{25\text{ cm}}{n'q} = \frac{25}{1{,}33 \cdot 30} = \frac{5}{8}$$

Instrumentos ópticos

Problema 15-23 Una lente convergente, de longitud focal 10 centímetros, tiene una imagen a 25 centímetros cuando se usa como amplificador. ¿Cuál es el tamaño de la imagen si el objeto es de 4 centímetros de largo? ¿Dónde está el objeto? (Fig. 15-19.)

Solución. La lupa crea una imagen virtual y derecha cuando el objeto está dentro del punto focal de la lente. La imagen más nítida tiene lugar a 25 cm, enfrente del ojo. Para hallar el tamaño, p debe ser positivo, q negativo y f positivo. Remplazando estos datos en la ecuación de las lentes, se obtiene:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{-25} = \frac{1}{f} \quad \therefore \frac{25}{p} = \frac{25}{f} + 1$$

Ahora, $25/p$ es el tamaño, entonces:

$$M = \frac{25}{f} + 1$$

El tamaño de la imagen es:

$$M = \frac{25}{f} + 1 = \frac{25}{10} + 1\ ;\ \text{3,5x, o sea, } 3{,}5 \cdot 4 = 14\text{ cm de larga}$$

La distancia al objeto es:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{f} - \frac{1}{q} = \frac{1}{10} - \frac{1}{-25} \quad \therefore p = 7{,}1\text{ cm}$$

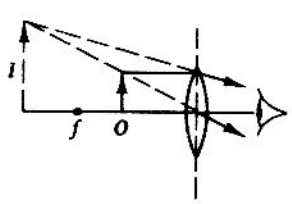


Figura 15-19

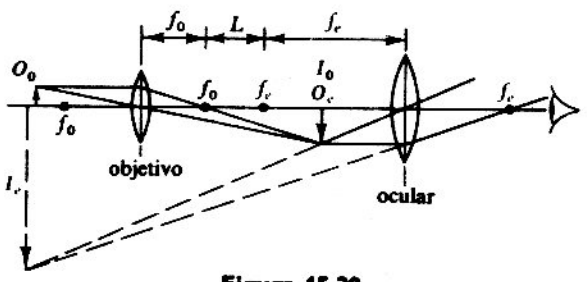


Figura 15-20

Problema 15-24 La distancia entre las dos lentes convergentes de un microscopio compuesto es de 12 centímetros. La distancia focal del ocular es de 5 centímetros, la longitud del objetivo es de 0,6 centímetros. Si se forma una imagen nítida a 25 centímetros, a la izquierda del ocular, halle: *a*) la posición inicial del objeto; *b*) el tamaño.

Solución. Observe la Figura 15-20. Si el objeto está cercano al punto focal del lente objetivo, se forma una imagen I_0 dentro del punto focal del ocular, como lo muestra la figura. La imagen I_0 se convierte en el objeto O_e para el ocular que forma una imagen virtual e invertida.

La amplificación que produce el objetivo es $M_0 = -q_0/p_0$; y la que produce el ocular es $M_e = 25/f_e + 1$. Entonces la amplificación total que produce el microscopio es el producto M_0M_e o:

$$M = -\frac{q_0}{p_0}\left[\left(\frac{25}{f_e}\right) + 1\right]$$

a) El objeto para el ocular es:

$$\frac{1}{p_e} = \frac{1}{f_e} - \frac{1}{q_e} = \frac{1}{5} - \frac{1}{-25} \quad \therefore p_e = 4{,}16 \text{ cm}$$

La distancia de la imagen para el objetivo es:

$$q_0 = 12 - 4{,}16 = 7{,}84 \text{ cm}$$

La distancia del objeto para el objetivo es:

$$\frac{1}{p_0} = \frac{1}{f_0} - \frac{1}{q_0} = \frac{1}{0{,}6} - \frac{1}{7{,}84} \quad \therefore p_0 = 0{,}64 \text{ cm}$$

b) La amplificación es:

$$M = -\frac{q_0}{p_0}\left[\left(\frac{25}{f_e}\right) + 1\right] = -\frac{7{,}84}{0{,}65}\left(\frac{25}{5} + 1\right) = -72{,}3x \text{ (invertida)}$$

Problema 15-25 Un microscopio compuesto tiene longitudes focales del objetivo y ocular de 1 centímetro y 2,75 centímetros, respectivamente. Dibuje la imagen producida por un objeto colocado a 1,08 centímetros del objetivo si las dos lentes están separadas 16 centímetros. (Fig. 15-21.)

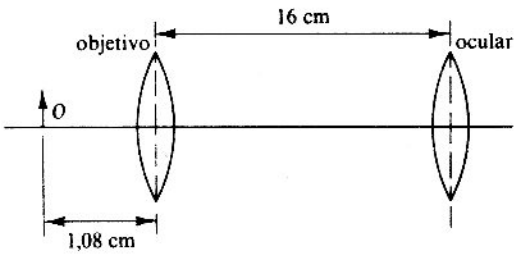


Figura 15-21

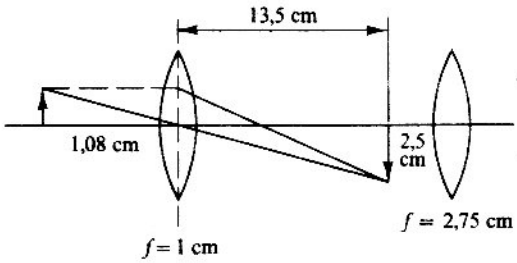


Figura 15-22

Solución. La Figura 15-22 muestra la imagen producida por el lente objetivo. Para calcular la distancia a la cual se forma se emplea la ecuación:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}, \quad \text{con} \quad p = 1{,}08 \text{ cm} \quad \text{y} \quad f = 1 \text{ cm}$$

Entonce

$$\frac{1}{1{,}08} + \frac{1}{q} = \frac{1}{1} \quad \therefore q = 13{,}5 \text{ cm}$$

Como la distancia entre las dos lentes es de 16 cm, la imagen está localizada a 2,5 cm del ocular, como lo indica la Figura 15-23. La Figura 15-24 muestra la imagen producida por la imagen anterior Como los dos rayos no

se encuentran, para un observador que mira por el ocular la imagen aparece más allá de la lente. Para hallar el punto en el cual está situada se emplea de nuevo la fórmula de las lentes con $p = 2{,}5$ cm y $f = 2{,}75$ cm. entonces:

$$\frac{1}{2{,}5} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2{,}75} \quad \therefore \frac{1}{q} = \frac{2{,}5}{(2{,}75)(2{,}5)} - \frac{2{,}75}{(2{,}75)(2{,}5)} = \frac{-0{,}25}{(2{,}75)(2{,}5)} \quad \therefore q = -\frac{(2{,}75)(2{,}5)}{0{,}25} = -27{,}5 \text{ cm}$$

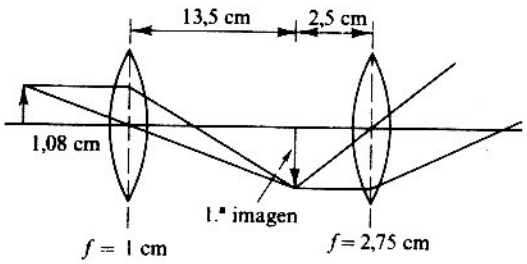


Figura 15-23

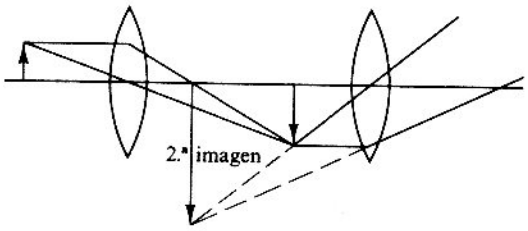


Figura 15-24

Es decir, la imagen aparece a 27,5 cm más allá del ocular.
La ampliación que produce el objetivo es: $q/p = 13{,}5/1{,}08 = 12{,}5$.
La ampliación que produce el ocular es: $q/p = 27{,}5/2{,}5 = 11$.
Entonces la ampliación total es el producto de las dos ampliaciones, es decir, $12{,}5 \cdot 11 = 137{,}5$.
Resumiendo: la imagen final es virtual, invertida, y 137,5 veces su tamaño original.

Problema 15-26 Un microscopio compuesto está formado por un objetivo y una lente ocular de longitudes focales 0,6 y 2 centímetros, respectivamente. Si un objeto se coloca a $\frac{5}{8}$ centímetros del objetivo y una persona ve la imagen a la distancia mínima (25 centímetros), halle la potencia amplificadora del sistema y la distancia que separa las lentes.

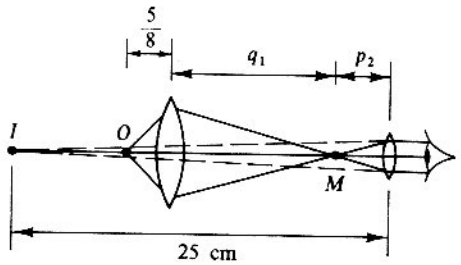


Figura 15-25

Solución. El objetivo, como lo indica la Figura 15-25, tiene un objeto O colocado a la distancia 5/8 cm. una imagen real a la distancia q_1. Entonces:

$$\frac{1}{5/8} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{0{,}6} \quad \therefore q_1 = 15 \text{ cm}$$

El ocular tiene un objeto real situado en M y una imagen virtual en I. Por consiguiente,

$$\frac{1}{p_2} - \frac{1}{25} = \frac{1}{2} \quad \therefore \frac{1}{p_2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{25} = \frac{27}{50} \quad \therefore p_2 = 1{,}85 \text{ cm}$$

Esto dice que la separación de las lentes es:

$$q_1 + p_2 = 16{,}85 \text{ cm}$$

La amplificación lineal que produce el objetivo es:

$$m = -\frac{q_1}{p_1} = -\frac{15 \text{ cm}}{5/8 \text{ cm}} = -24$$

La amplificación angular producida por el ocular es de:

$$M = \frac{u'}{u} = \frac{y/p_2}{y/25} = \frac{25}{p_2} = 13{,}5$$

La potencia resolutiva del sistema es:

$$m_1 \cdot M = -24 \cdot 13{,}5 = -324$$

La amplificación angular producida por el ocular es:

$$m_2 = -\frac{q_2}{p_2} = -\frac{-25}{50/27} = 13{,}5 = M$$

Esto nos dice que la amplificación lineal es siempre igual a la amplificación angular, para un ampliador simple, si la imagen está situada por lo menos a la distancia mínima de 25 cm.

Problema 15-27 Un microscopio tiene objetivos cuyas distancias focales son 15, 3 y 2 milímetros, respectivamente, y de oculares de aumentos angulares de $5x$ y $10x$. ¿Cuál es el aumento máximo y mínimo obtenido? Los objetivos forman una imagen situada a 15 centímetros más allá del segundo foco.

Solución. Los aumentos laterales de los objetivos son:

$$m_1 = -\frac{x_1}{f_1} = -\frac{150 \text{ mm}}{15 \text{ mm}} = -10; \quad m_2 = -\frac{x_2}{f_2} = -\frac{150 \text{ mm}}{3 \text{ mm}} = -50;$$

$$m_3 = -\frac{x_3}{f_3} = -\frac{150 \text{ mm}}{2 \text{ mm}} = -75{,}5$$

Entonces el aumento total máximo es:

$$M = m_3 \cdot M_2 = +75{,}2(10x) = 752x$$

El aumento total mínimo es:

$$M = m_1 \cdot M_1 = 10 \cdot 5x = 50x$$

Problema 15-28 La distancia focal del ocular de un microscopio es de 2 centímetros y la del objetivo 1 centímetro, y la separación entre ambos de 20 centímetros. La imagen formada por el ocular se encuentra en el infinito. Halle la distancia del objetivo al objeto y el aumento lineal que produce. ¿Cuál es el aumento total del microscopio? Considere las lentes delgadas.

Solución. Para el ocular $q' = \infty$, entonces:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{q} = \frac{1}{2} \quad \therefore p = 2 \text{ cm}$$

Para el objetivo $q' = d - p = 18$ cm y como $f_1 = 1$ cm, entonces:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{q} = \frac{1}{1} - \frac{1}{18} = \frac{17}{18} \quad \therefore p = \frac{18}{17} = 1{,}05 \text{ cm}$$

El aumento lineal producido por el objetivo es:

$$m = -\frac{q}{p} = -\frac{18}{1{,}05} = -17{,}1$$

El aumento total del microscopio es:

$$M = m \cdot M_2 \text{ con } M_2 = \frac{25}{f_2}$$

y como el aumento angular del ocular es $M_2 = 25/f_2 = 12{,}5$, entonces el aumento total es:

$$M = -17{,}1 \cdot 12{,}5 = -213{,}75$$

Problema 15-29 Las diapositivas para un proyector se deben ampliar 150 veces para que formen una imagen nítida en una pantalla situada a 4 metros de la lente del proyector. ¿A qué distancia debe estar la diapositiva de la lente y cuál es la longitud focal de dicha lente? (Figura 15-26.)

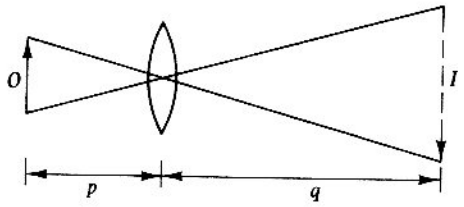


Figura 15-26

Solución. La ampliación producida por la lente es:

$$m = -\frac{q}{p} = -\frac{4m}{p} = -150$$

La distancia de la diapositiva a la lente es:

$$p = \frac{4m}{150} = \frac{400 \text{ cm}}{150} = 2{,}8 \text{ cm}$$

Aplicando la fórmula de las lentes se obtiene:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{150}{400} + \frac{1}{400} = \frac{151}{400} \quad \therefore f = \frac{400}{151} = 2{,}6 \text{ cm}$$

Problema 15-30 Un topógrafo emplea un telescopio con una lente objetivo de 30 centímetros y una retícula formada por dos rectas horizontales que están separadas 3 milímetros en el primer plano focal del ocular. Ve una recta a 15 metros de distancia del objetivo. ¿Qué longitud de la recta ve entre las rectas del retículo?

Solución. La lente del objetivo produce una imagen de la recta en el primer plano focal del ocular. La distancia del objetivo a la retícula está dada por:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad \text{o} \quad \frac{1}{1500} + \frac{1}{q} = \frac{1}{30} \quad \therefore \frac{1}{q} = \frac{1}{30} - \frac{1}{1500} = \frac{1470}{45000} \quad \therefore q = 30{,}6 \text{ cm}$$

La ampliación producida por el objetivo es:

$$m = -\frac{q}{p} = \frac{-30{,}6}{1500} \approx -\frac{1}{49}$$

La parte de la imagen que se forma entre las dos rectas del retículo tiene una longitud de 3 mm. La parte de la recta que ve es:

$$3 \cdot 49 \text{ mm} = 14{,}7 \text{ cm}$$

Problema 15-31 Un teleobjetivo está formado por una lente convergente de longitud focal 6 centímetros y se coloca a 4 centímetros y enfrente de una lente divergente de longitud focal $-2{,}5$ centímetros. *a*) Localice la imagen producida por un objeto distante. *b*) Compare el tamaño de la imagen formada por la combinación de las lentes con el tamaño de la imagen que produce la lente positiva.

Solución. *a*) Si no se emplea la lente negativa, la imagen AB se forma en el plano focal de la lente positiva, a 6 cm de dicha lente. La lente negativa disminuye la convergencia de los rayos refractados por la lente positiva y produce la imagen $A'B'$ en vez de AB.

Si la imagen AB está a $6 - 4 = 2$ cm más allá de la lente negativa y se considera como el objeto virtual de la lente negativa, entonces $p = -2$ cm (por ser AB virtual).

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{q} = -\frac{1}{2{,}5} \quad \therefore \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2{,}5} = \frac{0{,}5}{5} = \frac{1}{10} \quad \therefore q = 10 \text{ cm}$$

La imagen final $A'B'$ es real y está a 10 cm más allá de la lente negativa.

b) La ampliación lineal producida por la lente negativa es $q/p = 10/2 = 5$.

Problema 15-32 *a*) ¿Cuál debe ser la apertura de una cámara de longitud focal 6 centímetros para que tenga un valor f de $f/4{,}5$? *b*) ¿Cuál es el valor f de una lente de longitud focal 30 centímetros y cuyo máximo diámetro de apertura es de 25 centímetros?

Solución. *a*) El valor f nos dice que el diámetro de la apertura es 1/4,5 de la longitud focal de la lente; por tanto,

$$\text{apertura} = (1/4{,}5) \cdot 6 \text{ cm} = 1{,}3 \text{ cm}$$

b) Según la definición del valor f tenemos que:

$$\text{valor } f = \text{longitud focal/diámetro de apertura} = 30 \text{ cm}/25 \text{ cm} = 1{,}2$$

por consiguiente, el valor f de la lente es $f/1{,}2$.

Problema 15-33 El valor correcto de exposición de una lente se fija en $f/32$ y es 1/5 de segundo. ¿Cuál debe ser el tiempo de exposición si la lente se fija en $f/8$?

Solución. Como el valor de exposición se aumenta de 1/32 de la longitud focal a 1/8 de la longitud focal, aumenta en:

$$\frac{1/8}{1/32} = 4 \text{ veces su valor original}$$

La cantidad de luz que pasa por la lente es proporcional al cuadrado de su diámetro; por tanto, $4^2 = 16$ veces más luz pasará por la lente cuando se fija en $f/8$ que cuando se fija en $f/32$.

Para que produzca la misma fotografía que antes se necesita únicamente 1/16 del tiempo, o:

$$\text{tiempo} = (1/16)(1/5) \text{ seg} = 1/80 \text{ seg}$$

Problema 15-34 La distancia focal de un objetivo fotográfico $f/2{,}8$ es de 8 centímetros. *a*) ¿Cuál es el diámetro de la lente? *b*) Si el tiempo de exposición para tomar una foto es 1/200 segundos con el $f/2{,}8$, ¿cuál será el tiempo de exposición para un objetivo $f/5{,}6$?

Solución. *a*) El diámetro de la lente está dado por la relación:

$$d = f/2{,}8 = 8/2{,}8 = 2{,}86 \text{ cm}$$

b) Si el tiempo de exposición es $t = 1/200$ seg para $f/2{,}8$, el tiempo para el objetivo $f/5{,}6$ está en relación a su aumento con el cuadrado de (f/número), o sea,

$$t_2/t_1 = \left[\frac{f/2{,}8}{f/5{,}6}\right]^2 = 4$$

Por consiguiente, el tiempo de exposición pedido es:

$$t_2 = 4t_1 = 4/200 = 0{,}02 \text{ seg}$$

Problema 15-35 Una cámara emplea una velocidad de 1/54 de segundo cuando el número f es $f/2$. ¿Cuál es el tiempo de exposición si el número f es $f/6$?

Solución. De la relación que existe entre el tiempo de exposición y el número f es:

$$\frac{t_1}{(f/d_1)^2} = \frac{t_2}{(f/d_2)^2}$$

se obtiene:

$$t_2 = t_1 \frac{(d_1)^2}{(d_2)^2} = \frac{1}{54}\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 1/6 \text{ seg} \quad (d_1 = f/2, \quad d_2 = f/6, \quad t_1 = 1/54 \text{ seg})$$

Problema 15-36 La lente de un proyector ilumina una diapositiva de 2 centímetros de largo y proyecta su imagen sobre una pantalla a 20 metros de la lente. Si la lente tiene una longitud focal de 40 centímetros, ¿cuál es el tamaño de la imagen?

Solución. La distancia al objeto es:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{f} - \frac{1}{q} = \frac{1}{40} - \frac{1}{2000} \quad \therefore p = 40{,}8 \text{ cm}$$

La amplificación es:

$$m = -q/p = -2000/40{,}8 = -49x$$

El tamaño de la imagen es $-49 \cdot 2 = -98$ cm (el signo menos indica que la imagen es invertida).

Problema 15-37 Las dimensiones de una diapositiva son 8 por 10 centímetros. Se desea proyectar una imagen de la misma, aumentada hasta 2 por 3 metros sobre una pantalla situada a 10 metros de la lente de proyección. *a*) ¿Cuál debe ser la distancia focal de dicha lente? *b*) ¿En qué lugar debe colocarse la diapositiva?

Solución. *a*) El aumento es $m = 3 \text{ m}/10 \text{ cm} = 30$, y como $m = -q/p$, entonces la distancia objeto:

$$p = -q/m = -\frac{1000}{30} = 33{,}3 \text{ cm}$$

que es la distancia a la cual debe colocarse la diapositiva.

Según la ecuación $1/f = 1/p + 1/q$ se obtiene:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{33{,}5} - \frac{1}{1000} = \frac{9665}{335\,000} \quad \therefore f = 34 \text{ cm}$$

b) 33,3 cm.

Problema 15-38 Una persona présbita no puede ver los objetos claramente a distancias menores de 1 metro. ¿Qué tipo de lente debe usar para poder ver claramente a 25 centímetros? ¿Cuál es su potencia?

Solución. Como el objeto se debe colocar a 25 cm del ojo, podemos decir que la distancia objeto es de 25 cm. La imagen que se forma está en el mismo lado de la lente que el objeto y a una distancia de 1 m; por tanto, $q = -1$ m (el signo menos indica que la distancia imagen está más allá de la lente).

Empleando la ecuación $1/f = 1/p + 1/q$ se obtiene:

$$\frac{1}{25} + \frac{1}{-100} = \frac{1}{f} \quad \therefore f = \frac{100}{3} = 33{,}3 \text{ cm}$$

El valor positivo de la longitud focal indica que la lente debe ser convergente. La potencia de la lente, expresada en dioptrías, es igual a $1/f$ si la longitud focal se da en metros.

$$33{,}3 \text{ cm} = 0{,}333 \text{ m}$$

$$\text{Potencia} = 1/f = 1/0{,}333 = +3 \text{ dioptrías}$$

Problema 15-39 Una persona de vista normal tiene un campo de acomodación de 25 centímetros hasta el infinito. ¿A qué distancia podrá ver los objetos claramente si se coloca los anteojos, que tienen una corrección de +4 dioptrías?

Solución. Según la ecuación $1/f = 1/p_1 + 1/q_1$ se obtiene:

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{f} - \frac{1}{q} = \frac{1}{25} + \frac{1}{25} = \frac{1}{12{,}5} \quad \therefore p_1 = 12{,}5 \text{ cm} \ (f = 1/4 \text{ m} = 25 \text{ cm})$$

Si $q_2 = \infty$ y empleando la ecuación $1/f = 1/p_2 + 1/q_2$ se obtiene:

$$\frac{1}{p_2} = \frac{1}{25} \quad \therefore p_2 = 25 \text{ cm}$$

De lo anterior vemos que la persona ve claramente los objetos situados en el intervalo comprendido entre 12,5 cm y 25 cm.

Problema 15-40 Una persona miope no puede ver a una distancia mayor de 40 centímetros. ¿Cuál debe ser la potencia y el tipo de lente que necesita para que vea los objetos distantes con claridad?

Solución. Para los objetos distantes podemos decir que $p = \infty$. La imagen está en el mismo lado del ojo que el objeto; por tanto, $q = -40$ cm. Entonces, empleando la ecuación $1/f = 1/p + 1/q$ se obtiene:

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{-40} = \frac{1}{f} \quad \therefore f = -40 \text{ cm}$$

Esto nos dice que la lente debe ser negativa o divergente. Su potencia es igual a $1/f = 1/-0{,}4 = -2{,}5$ dioptrías. Entonces la potencia de la lente debe ser de $-2{,}5$ dioptrías.

Problema 15-41 *a*) ¿Dónde está el punto próximo de un ojo que usa gafas de +2 dioptrías? *b*) ¿Dónde está el punto remoto de un ojo que usa gafas de −0,5 dioptrías?

Solución. *a*) Como la potencia es igual a $1/f = 2$ dioptrías, $f = 1/2$ m = 50 cm. La distancia objeto de lectura normal es $p = 25$ cm, entonces de la ecuación $1/f = 1/p + 1/q$ se obtiene:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{1}{50} - \frac{1}{25} = -\frac{1}{50} \quad \therefore q = -50 \text{ cm}$$

y, por consiguiente, la distancia del punto próximo del objeto será $q = -50$ cm.

b) Si la potencia es igual a −0,5 dioptrías, $f = -2$ m = −200 cm, y como $p = \infty$ se obtiene:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad \therefore \frac{1}{q} = +\frac{1}{200} \quad \therefore q = 200 \text{ cm}$$

es decir, el punto remoto del ojo se encuentra a la distancia $q = 200$ cm.

Problema 15-42 Una persona miope usa gafas de −3,5 dioptrías. ¿A qué distancia puede leer sin gafas?

Solución. Como la persona es miope no puede ver objetos distantes sin el uso de gafas. Decimos que la distancia objeto es infinita. $q = \infty$. La longitud focal de la lente se puede determinar a partir de la potencia de la lente, y es igual a $1/f$, con f expresada en metros. Entonces:

$$\text{longitud focal} = 1/\text{potencia} = 1/-3{,}5 = -0{,}286 \text{ m} = -28{,}6 \text{ cm}$$

Entonces:

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{q} = \frac{1}{-28{,}6} \quad \therefore q = -28{,}6 \text{ cm}$$

Esto dice que la persona no puede ver los objetos claramente a distancias mayores de 28,6 cm de sus ojos.

Problema 15-43 Deduzca a partir del principio de Fermat la fórmula para un espejo esférico y la fórmula de las lentes delgadas. (Fig. 15-27.)

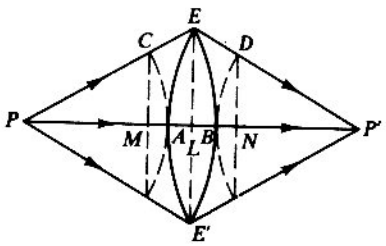


Figura 15-27

Solución. Obtención de la fórmula para las lentes delgadas. Sea P una fuente luminosa sobre el eje óptico principal de la lente y P' su imagen. Según el principio de Fermat, las longitudes ópticas de todos los rayos que salen de P y convergen a P' son iguales. Tomando a P y P' como centros, dibuje radios PA y $P'B$. Entonces podemos escribir, por ser las longitudes ópticas iguales, que:

$$(CED) = n(AB)$$

Si los rayos PE y EP' son paraxiales, la longitud de CED se puede tomar aproximadamente igual a la longitud de la proyección de MN sobre el eje principal. Entonces la relación anterior se puede escribir como:

$$MN = nAB \quad \text{o} \quad AM + BN = (n - 1)(AL + LB) \tag{1}$$

siendo L la proyección del punto E sobre el eje principal. Para una lente delgada, se tiene aproximadamente que:

$$AL = (EL)^2/2R_1 \quad LB = -(EL)^2\ 2R_2$$

siendo R_1 y R_2 los radios de curvatura de las superficies esféricas de la lente. Análogamente, si se verifica la condición paraxial se tiene:

$$AM = -(EL)^2/2x_1 \quad BN = (EL)^2/2x_2$$

con x_1, x_2 las longitudes PA y BP'. Remplazando estas expresiones en (1) se obtiene:

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Se ponen en contacto dos lentes de distancias focales -20 y $+35$ centímetros. Halle la potencia del sistema formado.
2. Una lente plano-cóncava tiene una superficie de 10 centímetros de radio esférico y una distancia focal de -15 centímetros. Halle su índice de refracción.
3. Determine dos posiciones para situar un objeto, respecto a una lente, para que su imagen resulte diez veces mayor. $f = 4$ centímetros.
4. Unos prismáticos tienen un objetivo de distancia focal 12 centímetros y un ocular de -5 centímetros. Determine la separación entre las lentes para ver un objeto situado a 20 centímetros.
5. Los radios de curvatura de una lente biconvexa son 10 y 20 cm. El índice de refracción del vidrio 1,5. Calcular la posición, naturaleza y tamaño de la imagen de un objeto de 4 cm colocado a 40 cm de la lente.
6. *a*) ¿Qué gafas necesita para leer una persona cuyo punto próximo se encuentra a 250 cm? *b*) ¿Qué gafas necesita para ver el infinito, un miope de punto remoto 50 cm?
7. Una diapositiva de 6 cm × 5 cm se desea proyectar en una pantalla situada a 10 m de la lente de proyección, aumentada hasta 1,44 m × 1,2 m. *a*) ¿Cuál debe ser la distancia, focal de la lente? *b*) Dónde debe colocarse la diapositiva.

CAPITULO 16

Polarización de la luz

Polarización. La luz es una perturbación electromagnética en la cual el campo eléctrico y el magnético son perpendiculares a la dirección de propagación. El vector campo eléctrico **E** es el responsable de los fenómenos de polarización.

La polarización total o parcial de la luz ordinaria puede producirse por diferentes mecanismos: reflexión, refracción, difusión y absorción.

Polarización por reflexión. Cuando la luz natural incide oblicuamente sobre una superficie reflectora, las ondas normales al plano de incidencia sufren una reflexión preferente. Para un ángulo determinado, *ángulo de polarización*, solamente se reflejan dichas ondas.

El estudio cuantitativo de este fenómeno fue realizado por el físico francés Malus haciendo incidir un haz de luz ordinaria sucesivamente sobre dos superficies reflectoras (Fig. 16-1), encontrando que la intensidad de la luz reflejada por la segunda superficie vale:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha \tag{16-1}$$

siendo I_0 la intensidad de la luz incidente y α el ángulo que forman los planos de reflexión.

El ángulo de polarización cumple la ley de Brewster:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{\operatorname{sen} i}{\cos i} = \operatorname{tg} i = n \tag{16-2}$$

lo cual demuestra que el ángulo de polarización depende de la longitud de onda.

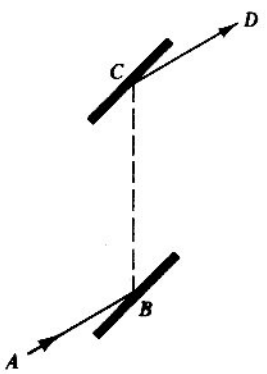


Figura 16-1

Giro del plano de polarización. Existen sustancias con *actividad óptica* capaz de hacer girar el plano de polarización de la luz que las atraviesa. Cuando el giro tiene lugar en el sentido de las agujas del reloj la sustancia se denomina *dextrógira.* En caso contrario, *levógira.* La rotación que las sustancias ópticamente activas producen toma un valor que es proporcional al espesor de la sustancia interpuesta (ley de Biot),

$$\alpha = k \cdot l \tag{16-3}$$

siendo k una constante específica de cada sustancia.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 16-1 Suponga que tres placas polarizantes están fijadas de tal manera que la primera y la última están a 90° entre sí y la placa central a 45° con respecto a las otras dos. Halle la intensidad de la luz transmitida por las tres placas.

Solución. El primer polarizador transmite la mitad de la luz incidente. Cada analizador sucesivo transmite: $\cos^2 \theta = \cos^2 45° = 0{,}5$. La intensidad total transmitida es:

$$\text{para } m = 3, \quad \frac{1}{2}(0{,}5)^{m-1} = \frac{1}{2}(0{,}5)^2 = 12{,}5\ \%, \quad \text{porque} \quad I = I_m \cos^2 \theta$$

Problema 16-2 *a*) Deduzca la ley de Brewster. *b*) El índice de refracción de la luz de longitud de onda de 5890 angstroms para el agua es de 1,33. ¿Cuál es el ángulo de polarización?

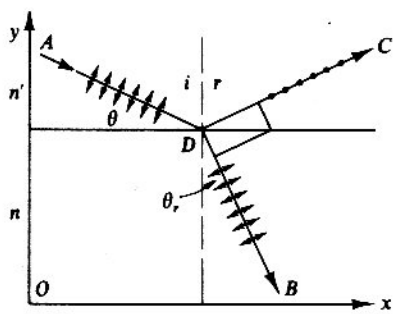


Figura 16-2

Solución. La luz sin polarizar que incide sobre una superficie de vidrio plano parte es refractada por el vidrio y parte reflejada. Si la luz reflejada y refractada se somete a un analizador se encuentra que ambos rayos están parcialmente polarizados. La ley de Brewster dice que la luz incide en el vidrio de tal manera que el ángulo que se forma entre los rayos reflejado y refractado es de 90°; los rayos reflejados se polarizan en el plano de manera que las vibraciones son paralelas a la superficie reflectora y la mayoría de las vibraciones de los rayos refractados se polariza en un plano paralelo al plano xy. El rayo incidente vibra en todas las direcciones perpendicularmente a AD. Según la Figura 16-2, el rayo reflejado DC se polariza en el plano; las vibraciones tienen lugar perpendicularmente al plano xy. La dirección de las vibraciones se muestra como un punto. El rayo refractado BD tiene la mayoría de sus vibraciones paralelas al plano xy.

La polarización máxima tiene lugar cuando los rayos CD y DB están a 90°. En estas condiciones:

$$\theta = \theta_r \quad \text{e} \quad i + \theta_r = 90° \quad \text{o} \quad \theta_r = 90 - i$$

Esto hace que el ángulo de incidencia i sea el ángulo complementario del ángulo de refracción θ_r. Según la ley de Snell:

$$n' \operatorname{sen} i = n \operatorname{sen} \theta_r = n \operatorname{sen} (90 - i)$$

De donde:

$$n = \frac{n' \operatorname{sen} i}{\operatorname{sen}(90 - i)}$$

y como $\operatorname{sen}(90 - i) = \cos i$, entonces:

$$n = \frac{n' \operatorname{sen} i}{\cos i} = n' \operatorname{tg} i$$

Si $n' = 1$, la ley de Brewster se convierte en $n = \operatorname{tg} i$.

b) El ángulo de polarización es:

$$\operatorname{tg} i = n = 1{,}33 \quad \therefore\ i = 53° 4'$$

Problema 16-3 Luz monocromática de longitud de onda 5893 angstroms incide en un cristal de calcita. Halle: *a*) la velocidad de los rayos ordinario y extraordinario transmitidos en el cristal. *b*) ¿Cuál es la longitud de onda del rayo ordinario y extraordinario transmitidos en el cristal?

Solución. El índice de refracción para los rayos ordinario y extraordinario es una función de la relación entre la velocidad de la luz en el medio transmisor y la velocidad de la luz. Así,

$$n_0 = c/v_0 \quad \text{y} \quad n_E = c/v_E$$

con v_0 = velocidad del rayo ordinario, v_E = velocidad del rayo extraordinario, n_0 = índice de refracción del rayo ordinario, n_E = índice de refracción del rayo extraordinario.

Si la longitud de onda del rayo incidente se divide por la longitud de onda de cualquier rayo ordinario o extraordinario, se obtiene el índice de refracción de la luz transmitida. Así,

$$n_0 = \frac{\lambda}{\lambda_0} \quad \text{y} \quad n_E = \frac{\lambda}{\lambda_E}$$

con λ = longitud de onda del rayo incidente, λ_E = longitud de onda del rayo extraordinario, λ_0 = longitud de onda del rayo ordinario.

a) Las velocidades son:

$$v_0 = c/n_0 = 3 \cdot 10^{10}/1{,}658 = 1{,}81 \cdot 10^{10} \text{ cm/seg}$$
$$v_E = c/n_E = 3 \cdot 10^{10}/1{,}486 = 2{,}02 \cdot 10^{10} \text{ cm/seg}$$

b) Las longitudes de onda son:

$$\lambda_0 = \lambda/n_0 = 5893 \cdot 10^{-8}/1{,}658 = 3554 \text{ Å}$$
$$\lambda_E = \lambda/n_E = 5893 \cdot 10^{-8}/1{,}486 = 3965 \text{ Å}$$

Problema 16-4 Un polarizador y un analizador están orientados de modo que se transmita la máxima cantidad de luz. ¿A qué fracción de este valor máximo se reduce la intensidad de la luz transmitida cuando se gira el analizador: *a*) 30°, *b*) 45°, *c*) 60°?

Solución. *a*) Cuando $\theta_1 = 30°$, la reducción de la intensidad es:

$$\frac{\cos^2 \theta_1}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 30°}{\cos^2 0} = \frac{(\sqrt{3}/2)^2}{1} = 0{,}75$$

b) Cuando $\theta_2 = 45°$, la fracción es:

$$\frac{\cos^2 45°}{1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0{,}5$$

c) Cuando $\theta_3 = 60°$, la fracción es:

$$\frac{\cos^2 60}{1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}25$$

Problema 16-5 *a*) ¿Qué altura sobre el horizonte debe tener el Sol para que la luz procedente de él y reflejada sobre una superficie de agua en calma esté completamente polarizada? *b*) ¿Cuál es el plano del vector **E** en la luz reflejada?

Solución. *a*) Para el aire, $n = 1$; para el agua, $n' = 1{,}33$. Según la ley de Brewster:

$$\operatorname{tg} \theta_p = n'/n = 1{,}33/1 = 1{,}33 \quad \therefore \theta = 53°$$

por tanto, la altura sobre el horizonte del Sol es: $\theta = 90 - 53 = 37°$.

b) El vector **E**, amplitud del campo eléctrico en una onda luminosa polarizada linealmente, es horizontal porque el plano donde se encuentra también lo es.

Problema 16-6 ¿A qué es igual el ángulo formado por los planos principales de un polarizador y un analizador si la intensidad de la luz natural después de pasar por el polarizador y el analizador se hace cuatro veces menor? La absorción de la luz se desprecia.

Solución. Sea I_0 la intensidad de la luz natural. Después de pasar por el polarizador su intensidad será $I_1 = 0{,}5I_0$. Y después de pasar por el analizador su intensidad será $I_2 = I_1 \cos^2 \alpha = 0{,}5I_0 \cos^2 \alpha$. De acuerdo con las condiciones del problema, $I_2/I_1 = 0{,}25$; por tanto,

$$\cos^2 \alpha = \frac{0{,}25}{0{,}5} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \alpha = 45°$$

Problema 16-7 Halle el coeficiente de reflexión de la luz natural que incide sobre un vidrio ($n = 1{,}54$) bajo el ángulo de polarización total. Halle el grado de polarización de los rayos que entran en el vidrio. La absorción de la luz se desprecia.

Solución. El coeficiente de reflexión de la luz incidente $k' = I_r/I_0$, donde $I_r = I_\perp + I_{II}$, con la particularidad de que:

$$I_\perp = 0{,}5I_0 \frac{\operatorname{sen}^2 (i + r)}{\operatorname{sen}^2 (i + r)} \quad \text{e} \quad I_{II} = 0{,}5I_0 \frac{\operatorname{tg}^2 (i - r)}{\operatorname{tg}^2 (i + r)}$$

En este caso, cuando la luz incide bajo el ángulo de polarización total, $\operatorname{tg} i = n = 1{,}54$; por consiguiente, $i = 57°$. Y como $i + r = 90°$, el ángulo de refracción será $r = 33°$. Entonces, $i - r = 24°$. Por tanto,

$$I_\perp = 0{,}5I_0 \frac{\operatorname{sen}^2 24°}{\operatorname{sen}^2 90°} 0{,}083I_0 \quad \text{e} \quad I_{II} = 0{,}5I_0 \frac{\operatorname{tg}^2 24°}{\operatorname{tg}^2 90°} = 0$$

es decir, en la luz reflejada, cuando el ángulo de incidencia es igual al de polarización total, las vibraciones tienen lugar únicamente en el plano perpendicular al de incidencia. En estas condiciones,

$$k' = \frac{I_r}{I_0} = \frac{I_\perp + I_{II}}{I_0} = 0{,}083$$

es decir, en el vidrio se refleja nada más que un 8,3 % de la energía de los rayos naturales incidentes. Estos serán los rayos cuyas vibraciones perpendiculares al plano de incidencia que pasan al segundo medio constituirá un 41,7 % de la energía total de los rayos que caen sobre el límite de separación, mientras que la energía de las vibraciones que se encuentran en el plano de incidencia constituirá un 50 %. El grado de polarización de los rayos que pasan al segundo medio será:

$$p = \frac{I_{II} - I_\perp}{I_{II} + I_\perp} = \frac{0{,}083}{0{,}917} = 0{,}091 = 9{,}1\ \%$$

Problema 16-8 Un rayo de luz natural pasa a través de una lámina de vidrio de caras planas y paralelas ($n = 1{,}54$) después de incidir sobre ella bajo el ángulo de polarización total. Halle el grado de polarización de los rayos que pasan a través de esta lámina.

Solución. Cuando el rayo de luz natural incide sobre la lámina de vidrio formando el ángulo de polarización total, el rayo refractado tiene la intensidad $I_1 = 0{,}917 I_0$ (vea la solución del problema anterior). En este rayo refractado las vibraciones perpendiculares al plano de incidencia constituyen $0{,}417 I_0$ y las vibraciones paralelas a dicho plano $0{,}5 I_0$. La intensidad del rayo reflejado en la segunda cara de la lámina es $I_2 = 0{,}083 \cdot 0{,}917 I_0 = 0{,}076 I_0$. Entonces la intensidad del rayo emergente de la lámina al aire será $I_3 = 0{,}917 I_0 - 0{,}076 I_0 = 0{,}841 I_0$, de la cual $0{,}5 I_0$ es la intensidad correspondiente a los rayos cuyas vibraciones son paralelas al plano de incidencia y $0{,}341 I_0$ la correspondiente a aquellos cuyas vibraciones son perpendiculares a dicho plano. Por tanto, el grado de polarización:

$$p = \frac{I_{II} - I_{\perp}}{I_{II} + I_{\perp}} = \frac{0{,}159}{0{,}917} = 18{,}9\ \%$$

es decir, el grado de polarización aumenta. En esto se basa la utilización de las «pilas de láminas de vidrio» de caras planas y paralelas en calidad de polarizadores.

Problema 16-9 Muestre que si una partícula está sujeta a dos vibraciones armónicas simples de la misma frecuencia, en ángulo recto y fuera de fase, describe una trayectoria elíptica que degenera en dos rectas que coinciden si la diferencia de fase es π. Muestre la relación de esto con la placa de media onda.

Solución. Suponga que las vibraciones tienen lugar a lo largo de los ejes coordenados y que existe una diferencia de fase ϕ entre ellas. Si $x = a \operatorname{sen} \omega t$, $y = b \operatorname{sen} (\omega t + \phi)$, entonces:

$$y/b = \operatorname{sen} \omega t \cos \phi + \cos \omega t \operatorname{sen} \phi = (x/a) \cdot \cos \phi + \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot \operatorname{sen} \phi$$

Al elevar al cuadrado y transponiendo términos se obtiene:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} \cos^2 \phi - \frac{2xy}{ab} \cos \phi = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \operatorname{sen}^2 \phi. \quad \therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \phi = \operatorname{sen}^2 \phi$$

que es la ecuación de una elipse cuyos ejes no coinciden con los ejes coordenados. Esto muestra que la partícula sigue una trayectoria elíptica. Si

$$\phi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$$

la ecuación se reduce a:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que es una elipse con ejes coincidentes con los ejes coordenados. Si $\phi = \pi$, la ecuación se reduce a:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{2xy}{ab} = 0$$

que es la ecuación de las rectas $x/a = -y/b$.

En el caso de la placa de media onda, la luz plana polarizada que incide en la lámina se descompone en dos componentes, O y E, de polarización plana formando ángulo recto entre sí e inicialmente fuera de fase. Pasan por la placa a velocidades diferentes y el espesor es tal que al emerger los dos haces difieren de fase en π. La partícula en este caso describe una recta. Esto significa que las dos componentes son equivalentes a una vibración simple con un ángulo igual a arc tg (b/a). Si la luz polarizada en un plano incide a 45° a las dos direcciones de transmisión se descompone en dos componentes iguales tales que $a = b$. La luz emergente se polariza en una dirección que forma un ángulo de $-45°$ con cada una de las direcciones principales en la placa.

CAPITULO 17

Interferencias

Dos trenes de ondas que se cruzan producen, en la región en que coinciden, perturbaciones que son la suma geométrica de las que cada uno aporta. Cuando los trenes de onda están en la misma fase, la perturbación es máxima, produciéndose una *interferencia constructiva*. Si coinciden con una diferencia de fase de un semiperiodo o múltiplo impar de él, la perturbación toma valor mínimo. Es una *interferencia destructiva*.

Experimento de Young. Si se hace incidir (Fig. 17-1) un haz monocromático sobre una rendija R y el haz resultante se recoge sobre dos rendijas R_1 y R_2 situadas a una distancia determinada, éstas, por el principio de Huyghens, se convierten en nuevos focos cuyas ondas se cruzan, originando interferencias destructivas y constructivas que al proyectarse en la pantalla P dan lugar a una serie de franjas oscuras y luminosas, respectivamente.

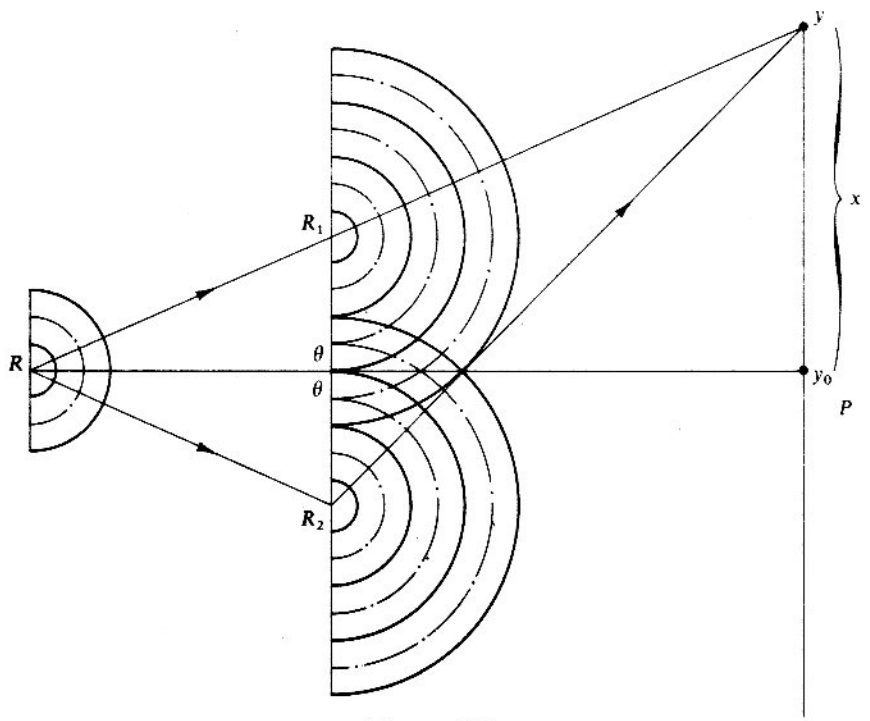


Figura 17-1

Para un punto y de la pantalla habrá luz máxima o completa oscuridad de acuerdo con las condiciones respectivas:

$$R_2y - R_1y = k\lambda \tag{17-1}$$

$$R_2y - R_1y = (2k + 1)\frac{\lambda}{2} \tag{17-2}$$

También y siendo d la distancia de la pantalla P al plano de las rendijas:

$$R_2y - R_1A = a \cdot \operatorname{sen}\theta \approx a\frac{x}{D} \tag{17-3}$$

Llamando x a la distancia y_0y se obtiene la relación:

$$x = k\frac{d \cdot \lambda}{a} \tag{17-4}$$

Difracción. La construcción geométrica de las sombras, basándose en la propagación rectilínea de la luz, y la observación de determinados casos de propagación a través de rendijas u orificios relativamente pequeños, presenta discrepancias, explicables dentro de los llamados fenómenos de difracción que, a fin de cuentas, quedan cumplidamente explicados por el principio de Huyghens.

Red de difracción. Está constituida por una serie de rendijas paralelas y equidistantes. La separación entre dos rendijas consecutivas recibe el nombre de constante de la red.

Un haz de luz monocromática que incide sobre una red de difracción con un ángulo α y una longitud de onda λ, presenta las siguientes condiciones de:

a) Claridad:

$$a \cdot \operatorname{sen}\alpha = k\lambda$$

b) Oscuridad:

$$a \operatorname{sen}\alpha = (2k + 1)\lambda$$

siendo k un número entero.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 17-1 Luz monocromática de una fuente luminosa incide sobre dos líneas de un retículo, separadas 0,5 milímetros. Se forman interferencias sobre una pantalla situada a un metro. Si la distancia entre las dos áreas iluminadas es de 1.36 milímetros, ¿cuál es la longitud de la luz incidente?

Solución. Empleando la fórmula $\lambda = dx/L$ se obtiene:

$$\lambda = \frac{0{,}5 \text{ mm } (1{,}36 \text{ mm})}{1 \text{ m}} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \text{ m } (1{,}36 \cdot 10^{-3} \text{ m})}{1 \text{ m}} = 6{,}8 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 6800 \text{ Å}$$

Problema 17-2 La distancia entre dos líneas de un retículo es de $2{,}5 \cdot 10^{-6}$ metros. Si el ángulo de difracción es de 20°, *a*) ¿cuál es la longitud de onda de la luz (suponiendo que es una difracción de primer orden)?; *b*) ¿cuál es ángulo para la imagen de segundo orden?

Solución. *a*) Como $n\lambda = d \operatorname{sen} \theta$, entonces:

$$\lambda = d \operatorname{sen} \theta / n = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ m sen } 20^\circ}{1} = 8{,}55 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 8550 \text{ Å}$$

b) Empleando la fórmula anterior para $n = 2$ y $\lambda = 8{,}55 \cdot 10^{-7}$ m se obtiene:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{n\lambda}{d} = \frac{2 \cdot 8550 \cdot 10^{-10} \text{m}}{2{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ m}} = 0{,}642 \quad \therefore \theta = 43^\circ$$

Problema 17-3 Un observador mira a través de una red de difracción por una rendija iluminada con luz cuya longitud de onda es de 6000 angstroms. La imagen de segundo orden se ve a un ángulo de 15°. ¿Cuál es la distancia entre las líneas y cuántas líneas hay por centímetro?

Solución. Como $n\lambda = d \operatorname{sen} \theta$, $d = n\lambda/\operatorname{sen} \theta = 2 \cdot 6000$ Å/sen 15°. Entonces sabemos que 6000 Å es $6 \cdot 10^{-7}$ m y sen 15° = 0,2588;

$$\therefore d = 2 \cdot 6000 \cdot 10^{-10} \text{m}/0{,}2588 = 4{,}63 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 4{,}63 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$$

El ancho de las líneas es de 0,000463 cm, y en 1 cm hay 1 cm/0,000463 cm = 21·60 líneas.

Problema 17-4 La luz de 5000 angstroms es refractada por una red que tiene 2500 líneas por centímetro. ¿Es posible obtener una imagen de orden 15? Si no, ¿cuál es el orden máximo de la imagen que se puede obtener?

Solución. Como $n\lambda = d \operatorname{sen} \theta$, $\operatorname{sen} \theta = n\lambda/d$, con $n = 15$, $\lambda = 5000$ Å y $d = 1/2500$ cm o 4×10^{-6} m; por consiguiente:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{15 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{4 \cdot 10^{-6} \text{ m}} = 1{,}875$$

Se sabe que el seno de un ángulo no puede ser mayor de 1, entonces no es posible obtener imagen de orden 15.

Para hallar la imagen de orden máximo que es posible sabemos que $n = d \operatorname{sen} \theta/\lambda$. Como ángulo máximo de difracción tomamos a 90° cuyo seno es 1. Entonces:

$$n = d \operatorname{sen} 90^\circ \lambda = \frac{4 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot 1}{5 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 8$$

lo cual dice que el orden máximo de la imagen que se puede obtener es 8.

Problema 17-5 *a*) Deduzca la fórmula para el interferómetro de Young de doble rendija. *b*) Muestre que si $m = 0, 2, 4, \ldots, L$ produce interferencia constructiva y si $m = 1, 3, 5, \ldots, L$ produce interferencia destructiva.

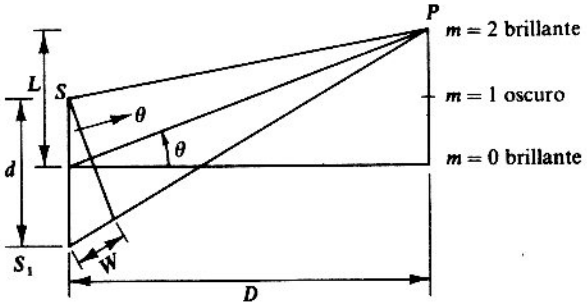


Figura 17-2

Solución. *a*) La Figura 17-2 muestra dos ondas que salen de S y S_1 y que se interfieren constructivamente en el punto P a una distancia L del eje central. Suponga que ésta es la primera interferencia constructiva para $m = 0$; entonces W es igual a una longitud de onda completa. Es decir, S_1P es dos medias longitudes de onda mayor que SP. Entonces, $W = d \operatorname{sen} \theta$, con d la distancia entre las rendijas y W la diferencia de longitud de onda; entonces, $W = \lambda$.

Ahora si m (el orden) es igual a la mitad de longitudes de onda, contando el nodo central como $m = 0$, se obtiene:

$$W = m\lambda/2 \quad \text{y} \quad d \operatorname{sen} \theta = m\lambda/2$$

También $\operatorname{tg} \theta = L/D$, y como θ es pequeño, $\operatorname{tg} \theta \approx \operatorname{sen} \theta$. Igualando se obtiene:

$$L/D = m\lambda/2d, \quad \text{de donde} \quad L = \frac{m\lambda}{2} \cdot \frac{D}{d}$$

Cuando m es par, el nodo es brillante, y si m es impar, el nodo es oscuro.

b) Para los nodos brillantes, m es par.

1. Si $m = 0$, $\quad L = \dfrac{m\lambda}{2} = \dfrac{0\lambda}{2} = 0$

Como $SP = SP_1$ existe una interferencia constructiva y el nodo central es brillante.

2. $m = 2$, $\quad L = \dfrac{m\lambda}{2} = \dfrac{2\lambda}{2} = \lambda$ (brillante)

3. $m = 4$, $\quad L = \dfrac{4\lambda}{2} = 2\lambda$ (brillante)

Para los nodos oscuros, m es un entero impar.

1. $m = 1$, $\quad L = \dfrac{m\lambda}{2} = \dfrac{\lambda}{2}$ (nodo oscuro)

2. $m = 3$, $\quad L = \dfrac{3}{2}\lambda$ (nodo oscuro)

3. $m = 5$, $\quad L = \dfrac{5}{2}\lambda$ (nodo oscuro)

Problema 17-6 Una pantalla está a 1 metro de dos rendijas que están separadas 1,5 milímetros. *a*) ¿Cuál es la distancia del nodo oscuro de tercer orden al centro de la pantalla para una luz de longitud de onda 6500 angstroms? *b*) ¿Para el nodo iluminado de cuarto orden, al centro? *c*) ¿Cuál es la separación de los nodos brillantes?

Solución. *a*) El nodo oscuro de tercer orden ($m = 3$), $\lambda = 6500 \cdot 10^{-8}$ cm. Entonces:

$$L = \frac{3\lambda}{2} \cdot \frac{D}{d} = \frac{3 \cdot 6500 \cdot 10^{-8} \cdot 100}{2(0{,}15)} = 0{,}065 \text{ cm}$$

b) Para el nodo brillante de cuarto orden ($m = 4$) y:

$$L = \frac{4 \cdot 6500 \cdot 10^{-8} \cdot 100}{2(0{,}15)} = 0{,}0867 \text{ cm}$$

c) La distancia entre dos nodos brillantes es:

$$L = \frac{2 \cdot 6500 \cdot 10^{-8} \cdot 100}{2(0{,}15)} = 0{,}043 \text{ cm}$$

Problema 17-7 En el experimento de Young se interpuso una lámina delgada de vidrio en la trayectoria de uno de los rayos inferentes. Esto hizo que la franja brillante central se des-

plazara hasta la posición que al principio tenía la quinta franja brillante (sin contar la central). El rayo incidía sobre la lámina perpendicularmente. El índice de refracción de la lámina es 1,5. La longitud de onda $6 \cdot 10^{-7}$ metros. ¿Qué espesor tenía la lámina?

Solución. Como resultado de la interposición de la lámina de vidrio la diferencia de marcha entre los rayos interferentes varía en la magnitud $\Delta = nh - h = h(n-1)$, siendo h el espesor de la lámina y n su índice de refracción. Por otra parte, debido a la interposición de la lámina se produjo un desplazamiento en k franjas. Por consiguiente, la diferencia de marcha complementaria introducida por la lámina será igual a $k\lambda$. De esta forma, $h(n-1) = k\lambda$, de donde:

$$h = \frac{k\lambda}{n-1} = 6 \cdot 10^{-6}\ \text{m}$$

Problema 17-8 Una película jabonosa ($n = 1{,}33$) colocada verticalmente toma la forma de una cuña a causa del escurrimiento del líquido. Observando las franjas de interferencia a la luz reflejada de un arco de mercurio ($\lambda = 5461$ angstroms) nos encontramos con que la distancia entre cinco franjas es igual a 2 centímetros. Halle el ángulo de la cuña en segundos. La luz incide perpendicularmente sobre la superficie de la película.

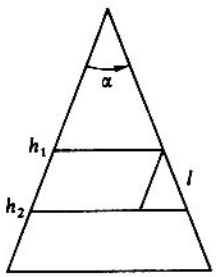


Figura 17-3

Solución. Siendo h_1 y h_2 los espesores de la película correspondientes a dos franjas contiguas tendremos que $\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{\lambda}{2n}$, y designando por l la distancia que hay entre dos de estas franjas contiguas podremos considerar que $\Delta h = l \operatorname{tg} \alpha$, siendo α el ángulo de la cuña. De aquí se deduce que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k\lambda}{2nl} = 5{,}13 \cdot 10^{-5} \quad \text{y} \quad \alpha = 11''$$

Problema 17-9 En un interferómetro de Michelson para conseguir que la figura de interferencia se desplazara 500 franjas fue necesario correr el espejo una distancia igual a 0,161 milímetros. Halle la longitud de onda de la luz incidente.

Solución. A la traslación L del espejo a una distancia $\frac{\lambda}{2}$ le corresponde una variación de la diferencia de marcha igual a λ, es decir, un desplazamiento de la figura de interferencia en una franja. De esta forma, $L = k\frac{\lambda}{2}$, siendo k el número de franjas que pasan por el campo visual, de donde $\lambda = \frac{2L}{k} = 6{,}44 \cdot 10^{-7}$ m.

Problema 17-10 Estudie los fenómenos de interferencia que tienen lugar en una película delgada.

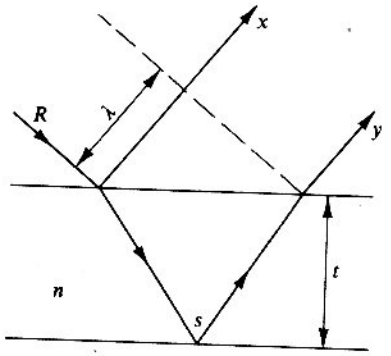


Figura 17-4

Solución. La Figura 17-4 muestra las superficies superior e inferior de la película. La luz que incide en la parte superior atraviesa la película. Parte de la luz se refleja en la cara superior y parte se refleja en la cara inferior. Si la diferencia de trayectoria entre el rayo y y el rayo x es λ hay un refuerzo. El rayo x se refleja en una superficie de índice de refracción mayor que el del medio incidente (aire); el rayo y se refleja en una superficie de menor índice de refracción (superficie inferior) menor que el del medio incidente (n). En estas condiciones hay un desplazamiento de media longitud de onda, y en vez de un refuerzo hay interferencia destructiva entre los rayos x y y.

Cuando la incidencia es normal, la trayectoria equivalente del rayo para un refuerzo es dos veces el espesor de la película multiplicado por el índice de refracción [$(1/2)\lambda$ dentro de la película en ambas direcciones], $2nt$.

Agregando $\frac{\lambda}{2}$, la ecuación anterior se convierte en $2nt + \frac{\lambda}{2}$, e igualando con $\frac{m}{2}\lambda$ tenemos que:

$$2nt + \frac{\lambda}{2} = \frac{m\lambda}{2}$$

De donde $t = \frac{(m-1)\lambda}{4n}$, que es el espesor de la película.

Para las franjas brillantes tenemos que $m = 2, 4, 6, \ldots$, y para las franjas oscuras, $m = 1, 3, 5, \ldots$

Problema 17-11 Muestre que si m es par las franjas son brillantes y si es impar las franjas son oscuras.

Solución. Para las franjas brillantes:

1. $m = 2$; el espesor de la película es:

$$t = \frac{(m-1)\lambda}{4n} = \frac{(2-1)\lambda}{4n} = \frac{\lambda}{4n}$$

Si el espesor es $\frac{\lambda}{4}$, la luz debe bajar hasta la superficie inferior y regresar. Como el espesor es $\frac{\lambda}{4}$, la luz recorre $\frac{\lambda}{2}$. Considerando media longitud de onda como desplazamiento, al sumar se obtiene 1λ para una franja brillante.

2. $m = 4$; el espesor es:

$$t = \frac{(4-1)\lambda}{4n} = \frac{3\lambda}{4n}$$

La trayectoria de la onda es:

$$2\left(\frac{3\lambda}{4n}\right) = \frac{3\lambda}{2n}$$

da 2λ para una franja brillante.

Para las franjas oscuras:

1. $m = 1$; el espesor es:

$$t = \frac{(m-1)\lambda}{4n} = \frac{(1-1)\lambda}{4n} = 0$$

La trayectoria de la onda se debe reforzar constructivamente. Considerando un desplazamiento de media onda hay destrucción, produciendo una franja central oscura.

2. $m = 3$; el espesor es:

$$t = \frac{(m-1)\lambda}{4n} = \frac{(3-1)\lambda}{4n} = \frac{\lambda}{2n}$$

La trayectoria de la onda es el doble del espesor o:

$$2\left(\frac{\lambda}{2n}\right) = \frac{\lambda}{n}$$

Sumando un desplazamiento de media onda, la franja es oscura o:

$$\frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{2n} = \frac{3\lambda}{2n}$$

Problema 17-12 Una película de aceite está sobre una placa de vidrio. Si se ilumina por luz de longitud de onda de 5800 angstroms, incidiendo normalmente, ¿cuál debe ser el espesor mínimo del aceite para que se produzca una franja oscura? ¿Cuál es el espesor de la décima banda oscura? Indice de refracción del aceite, 1,4.

Solución. El retraso del rayo y comparado con el del rayo x es $\frac{\lambda}{2}$, producido por la refracción más $2nd$ debido al espesor de la película. Entonces el retraso es $\frac{\lambda}{2} + 2nd$. Cuando este retraso es igual a un número impar de medias longitudes de onda hay cancelación y, por tanto, oscuridad. Cuando el retraso es un número par de medias ondas o un número entero de ondas hay iluminación.

Si el retraso es $\frac{\lambda}{2}$, entonces $\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2} + 2dn$; entonces $d = 0$. Así una película de espesor cero produce una franja oscura. La siguiente que produce una franja oscura tiene un retraso igual a $\frac{3}{2}\lambda$; por tanto,

$$\frac{3}{2}\lambda = \frac{\lambda}{2} + 2dn \quad \therefore d = \frac{\lambda}{2n} = \frac{5800\ \text{Å}}{2 \cdot 1{,}4} = 2080\ \text{Å}$$

que es el espesor mínimo de la capa de aceite que produce una franja oscura. Para producir una décima franja oscura, el retraso debe ser 9 longitudes de onda más 3/2 longitudes de onda; por tanto,

$$\frac{21}{2}\lambda = \frac{1}{2}\lambda + 2dn \quad \therefore d = \frac{10\lambda}{2n} = 10 \cdot 5800\ \text{Å}/2(1{,}4) = 20\,800\ \text{Å}$$

Problema 17-13 Halle la ecuación de los anillos de Newton.

Solución. La Figura 17-5 indica una lente colocada sobre una superficie plana. La luz que proviene de S se refleja en la superficie inferior de la lente y en la superficie plana y las dos se refuerzan o se destruyen. Como la lente tiene un punto de contacto y el desplazamiento de media onda se aplica, el punto de contacto aparece oscuro y aparecen anillos oscuros. De los triángulos SDB y ABC se obtiene:

$$\theta = \theta_2, \quad \theta = \theta_1 \quad \therefore \theta_1 = \theta_2$$

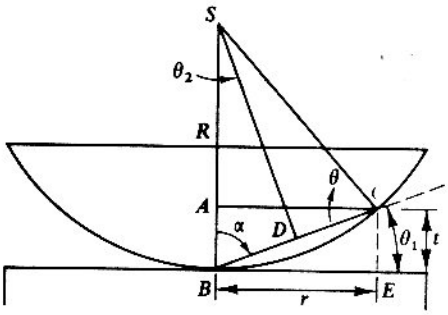


Figura 17-5

Como sen $\theta_2 = \dfrac{BC/2}{R} = \dfrac{BC}{2R}$; si t es pequeño, BC se puede remplazar por r, el radio del anillo, y sen $\theta_2 = \dfrac{r}{2R} = \text{sen } \theta_1$.

En el triángulo BCE se tiene: $\text{tg } \theta_1 = t/r = \text{sen } \theta_1$, con θ_1 pequeño.

Igualando: $\dfrac{t}{r} = \dfrac{r}{2R}$, de donde $t = \dfrac{r^2}{2R}$. Pero como t es igual a $t = \dfrac{(m-1)\lambda}{4}$, entonces:

$$\frac{(m-1)\lambda}{4} = \frac{r^2}{2R}$$

Para los anillos iluminados, $m = 2, 4, 6, \ldots$, y para los anillos oscuros, $m = 1, 3, 5, \ldots$

Problema 17-14 La longitud de onda de una luz es de 6500 angstroms. *a*) ¿Cuál es el espesor de la cuña de aire en el segundo anillo brillante? *b*) ¿Para el segundo anillo oscuro? *c*) ¿Cuál es el diámetro del segundo anillo brillante si el diámetro de la lente es de 20 centímetros?

Solución. *a*) Para el segundo anillo brillante, $m = 2 \cdot 2 = 4$. Entonces:

$$t = \frac{(4-1)6500 \cdot 10^{-8}}{4} = 4{,}875 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$$

b) Para el segundo anillo oscuro, $m = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ y:

$$t = \frac{(3-1)6500 \cdot 10^{-8}}{4} = 3{,}25 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$$

c) Para el diámetro del segundo anillo brillante, $m = 4$:

$$r = \sqrt{\frac{2R\lambda(m-1)}{4}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 6500 \cdot 10^{-8}(4-1)}{4}} = 3{,}12 \cdot 10^{-2} \text{ cm (radio)}$$

diámetro $= 6{,}24 \cdot 10^{-2}$ cm.

Problema 17-15 Un dispositivo para obtener anillos de Newton se ilumina con luz blanca que incide normalmente. Halle: *a*) el radio del cuarto anillo azul ($\lambda_1 = 4 \cdot 10^{-5}$ centímetros), y *b*) el radio del tercer anillo rojo ($\lambda_2 = 6{,}3 \cdot 10^{-5}$ centímetros). La observación se realiza con luz transmitida. El radio de curvatura de la lente es de 5 metros.

Solución. *a*) $r_4 = \sqrt{4R\lambda_1} = 2{,}8 \cdot 10^{-3}$ m $= 2{,}8$ mm.

b) $r_3 = \sqrt{3R\lambda_2} = 3{,}1 \cdot 10^{-3}$ m $= 3{,}1$ mm. Vemos, pues, que el tercer anillo rojo se encuentra más lejos que el cuarto azul. Esto explica por qué con la luz blanca los anillos de Newton se pueden observar únicamente cuando los espesores de la capa de aire son pequeños. Cuando estos espesores son grandes se produce una superposición de diferentes colores en un mismo sitio.

Problema 17-16 Muestre que en el experimento de los anillos de Newton se cumple que $r_p^2 - r_q^2 = R(p - q)\lambda$, con λ la longitud de onda de la luz, R el radio de curvatura de la lente, r_p y r_q los radios de los dos anillos que se indican en la Figura 17-6. La luz reflejada toca la superficie de la base normalmente.

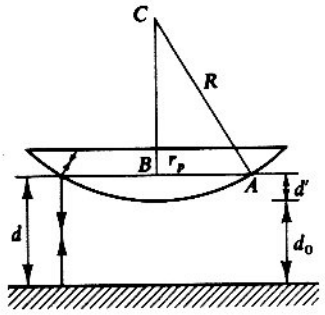


Figura 17-6

Solución. Hay interferencia entre los rayos reflejados en la cara inferior de la lente y los reflejados en la superficie plana.

En general, las dos superficies no están en contacto y la diferencia de trayectoria entre los rayos que se interfieren es:

$$2d + \frac{\lambda}{2} = 2d_0 + 2d' + \frac{\lambda}{2}$$

También,

$$CA^2 = CB^2 + BA^2 \quad \text{o} \quad R^2 = (R - d')^2 + BA^2, \quad \text{de donde} \quad BA^2 = 2Rd' - d'^2$$

Como d' es pequeño se puede despreciar el término d'^2 en comparación con $2Rd'$. Entonces, $BA^2 = 2Rd'$. Si BA es el radio del anillo de interferencia r_p producido por la diferencia de trayectoria $p\lambda$, entonces:

$$p\lambda = 2d_0 + 2d' + \frac{\lambda}{2} = 2d_0 + \frac{\lambda}{2} + \frac{r_p^2}{R}; \quad q\lambda = 2d_0 + \frac{\lambda}{2} + \frac{r_q^2}{R} \quad \therefore (p - q)\lambda = \frac{1}{R}(r_p^2 - r_q^2)$$

Problema 17-17 Luz de 6000 angstroms pasa por una rendija y produce una franja brillante en una pantalla situada a 1,6 metros de distancia. *a*) ¿Cuál es la distancia de la franja central brillante a la franja brillante de tercer orden? La rendija tiene un ancho de 0,04 centímetros. *b*) Halle la distancia de la tercera franja brillante y central a la tercera franja.

Solución. *a*) Para la tercera franja brillante de tercer orden, $m = 3$, y:

$$L = \frac{m\lambda D}{2d} = \frac{3(6000 \cdot 10^{-8})160}{2(0{,}04)} = 0{,}36 \text{ cm}$$

b) Para la tercera franja brillante, $m = 3 \cdot 2 - 1 = 5$, y:

$$L = \frac{m\lambda D}{2d} = \frac{5 \cdot 6000 \cdot 10^{-8} \cdot 160}{2(0{,}04)} = 0{,}6 \text{ cm}$$

Problema 17-18 En el experimento de la doble rendija de Young en el cual se emplea luz de longitud de onda $5{,}5 \cdot 10^{-7}$ metros, la franja brillante de orden cero en el modelo de interferencia está situada centralmente en la pantalla. Cuando una película de material transparente y de índice de refracción 1,4 se coloca sobre una de las rendijas se encuentra que la posición central está ocupada por la franja brillante de cuarto orden. ¿Cuál es el espesor de la película?

Solución. Cuando las rendijas están sin cubrir, la franja brillante de orden cero está en un punto central y equidistante de las dos rendijas y las ondas que llegan a dicho punto están en fase.

Si la rendija S_1 se cubre con una película de espesor d e índice de refracción n, la luz que pasa por la película ha recorrido una distancia óptica nd. La luz que pasa por la rendija S_2 ha recorrido una distancia óptica igual a $d(n = 1)$ para el aire. Entonces existe una diferencia de trayectoria óptica entre la luz que pasa por las dos rendijas e igual a $nd - d = d(n - 1)$.

La franja en el punto central es la franja de cuarto orden. Esto quiere decir que la diferencia de trayectoria óptica es 4λ. Entonces:

$$d(n - 1) = 4\lambda \quad \therefore d = \frac{4\lambda}{n - 1} = \frac{4 \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-7}}{0{,}4} = 5{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Problema 17-19 En el experimento de las dos rendijas de Young están separadas 1 milímetro y se iluminan con luz de longitudes de onda de 588 nanómetros y 504 nanómetros. ¿A qué distancia de la franja central iluminada, sobre una pantalla situada a 1,5 metros de las rendijas, se formará una franja brillante de uno de los modelos de interferencia para que coincida con una de las franjas brillantes del segundo modelo?

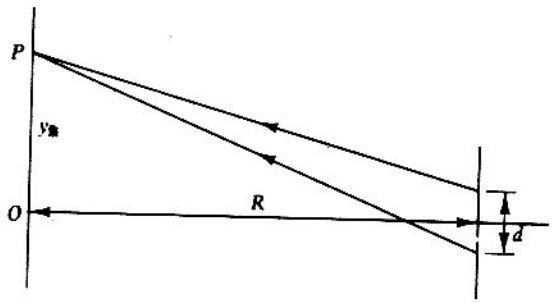


Figura 17-7

Solución. La distancia que hay entre la franja central y la m-ésima franja brillante, en el experimento de Young, es: $y_m = mR\lambda/d$.

Cada longitud de onda produce su propio sistema de franjas. Los dos sistemas se superponen cuando la m-ésima franja brillante del sistema, debido a la longitud de onda λ, coincide con la n-ésima franja brillante del producido por la longitud de onda λ'. Es decir,

$$\frac{mR\lambda}{d} = y_m = y'_n = \frac{nR\lambda'}{d} \quad \therefore m\lambda = n\lambda' \quad \therefore \frac{m}{n} = \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{588}{504} = \frac{7}{6}, \; 1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$$

La primera posición para la cual se superponen tiene lugar en la séptima franja del sistema producido por la longitud de onda de 504 nm o la sexta franja del sistema producido por la longitud de onda de 588 nm. La distancia pedida es:

$$y_7 = y'_6 = \frac{7 \cdot 1{,}5 \cdot 504 \cdot 10^{-9}}{10^{-3}} = 5292 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 5{,}292 \text{ mm}$$

Problema 17-20 Calcule los radios de las cinco primeras zonas de Fresnel si la distancia que hay desde la fuente luminosa hasta la superficie de onda es igual a 1 metro, la distancia desde esta última hasta el punto de observación también es igual a 1 metro y $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ metros.

Solución. El radio de la zona k es $r_k = \sqrt{k \dfrac{ad\lambda}{a + d}}$, donde a es la distancia que hay desde el origen de las ondas hasta la superficie de onda y d la distancia desde esta superficie hasta el punto de observación. Al remplazar los datos numéricos en el problema se encuentra que:

$$r_1 = 0{,}5 \text{ mm}, \; r_2 = 0{,}71 \text{ mm}, \; r_3 = 0{,}86 \text{ mm}, \; r_4 = 1 \text{ mm y } r_5 = 1{,}12 \text{ mm}$$

Problema 17-21 Una figura de difracción se observa a 4 milímetros de distancia de una fuente puntual de luz monocromática ($\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ metros). En el punto medio entre la pantalla y la fuente luminosa se encuentra un diagrama con un orificio circular. ¿Qué radio deberá tener este orificio para que el centro de los anillos de difracción que se ven en la pantalla sea lo más oscuro posible?

Solución. Supongamos que la abertura del diafragma deja pasar k zonas de Fresnel. En este caso, el radio de la zona k será al mismo tiempo el radio de la abertura, $r_k = \sqrt{k \dfrac{ad\lambda}{a+d}}$. La iluminación mínima del centro de los anillos que se observan en la pantalla corresponde a dos zonas ($k = 2$). Al remplazar los datos numéricos del problema se halla que $r = 10^{-3}$ m $= 1$ mm.

Problema 17-22 Una red de difracción tiene 6000 líneas/centímetro. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda de segundo orden de un rayo que forma un ángulo de 37° 58′ con la franja central? La distancia de la red a la pantalla es de 60 centímetros. *b*) ¿Cuál es el orden máximo posible?

Solución. *a*) Para este caso, $d = 1/6000$, $m = 2$, $D = 60$ cm, $\theta = 37° 58'$. La distancia entre la franja de segundo orden y el rayo central es:

$$L = D \operatorname{tg} \theta = 60 \operatorname{tg} 37° 58' = 46{,}8 \text{ cm}$$

Para hallar la longitud de onda de esta luz:

$$\lambda = \frac{Ld}{mD} = \frac{46{,}8}{2 \cdot 60 \cdot 6000} = 6{,}5 \cdot 10^{-5} = 6500 \text{ Å}$$

En la ecuación $m\lambda = d \operatorname{sen} \theta$ la magnitud de sen θ no puede exceder a 1; entonces si la longitud de onda y la distancia entre dos líneas es constante, el orden máximo posible de m es una función de sen θ.

b) De la ecuación $m\lambda = d \operatorname{sen} \theta$, resolviendo para m con $\theta = 90°$, se obtiene:

$$m = \frac{d}{\lambda} \operatorname{sen} 90° = \frac{1}{6000 \cdot 6500 \cdot 10^{-8}} \cdot 1 = 2{,}6$$

Entonces el orden máximo posible es $m = 2$.

Problema 17-23 El espectro de una luz consiste en rectas y franjas que varían de una longitud de onda de $5 \cdot 10^{-5}$ centímetros a $7{,}5 \cdot 10^{-5}$ centímetros. Si una red de difracción se ilumina normalmente con esta luz se halla que dos espectros adyacentes se superponen; la unión de los dos espectros tiene lugar a 45°. ¿Cuántas líneas por centímetro tiene la red?

Solución. A 45° se tiene que: $d \operatorname{sen} 45° = m \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-5}$ cm y, además, $d \operatorname{sen} 45° = (m + 1)5 \cdot 10^{-5}$ cm; dividiendo las dos expresiones anteriores miembro a miembro se obtiene:

$$(m + 1)/m = 7{,}5/5 = 3/2 \quad \therefore m = 2$$

El espectro de segundo orden se yuxtapone con el tercero. Además,

$$d \quad \frac{2 \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}}{\operatorname{sen} 45} = 2{,}12 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$$

que es la separación de las líneas de la red. Entonces el número de líneas por centímetro es:

$$n = 1/d = 10^4/2{,}12 \text{ cm} = 4715 \text{ por cm}$$

Problema 17-24 Una red plana de difracción tiene 4000 rayas por centímetro y trabaja con luz transmitida. Halle la separación angular, en el espectro de segundo orden, entre las rectas α y δ del hidrógeno atómico, cuyas longitudes de onda son 656 mμ y 410 mμ, respectivamente.

Solución. $m = 2$, $\lambda_\alpha = 5{,}56 \cdot 10^{-5}$ cm, $\lambda_\delta = 4{,}1 \cdot 10^{-5}$ cm. La constante d de la red es $d = 1/N = 1/4000 = 25 \cdot 10^{-5}$ cm; por tanto, la desviación angular correspondiente a λ_α es:

$$\operatorname{sen} \theta_\alpha = \frac{m\lambda_\alpha}{d} = \frac{2 \cdot 5{,}6 \cdot 10^{-5}}{25 \cdot 10^{-5}} = 0{,}4448 \quad \therefore \ \theta_\alpha = 26°, 24'$$

La desviación angular correspondiente a λ_δ es:

$$\operatorname{sen} \theta_\delta = \frac{m\lambda_\delta}{d} = \frac{2 \cdot 4{,}1 \cdot 10^{-5}}{25 \cdot 10^{-5}} = 0{,}328 \quad \therefore \ \theta_\delta = 19° \, 9'$$

Entonces la separación angular en el espectro de segundo orden entre las líneas α y δ del hidrógeno atómico es:

$$\theta_\alpha - \theta_\delta = 26°, 24' - 19° \, 9' = 7° \, 15'$$

Problema 17-25 Sobre una red de difracción incide normalmente un haz luminoso procedente de un tubo de descarga. ¿A qué deberá ser igual la constante de esta red para que en la dirección $\theta = 41°$ coincidan los máximos de las dos rayas $\lambda_1 = 6563$ angstroms y $\lambda_2 = 4102$ angstroms?

Solución. Tenemos que:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{k_1\lambda_1}{d} = \frac{k_2\lambda_2}{d}$$

o sea, $k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2$, de donde:

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{6563}{4102} = 1{,}6$$

Como k_1 y k_2 tienen que ser forzosamente números enteros es evidente que la condición $k_2/k_1 = 1{,}6$ la cumplen los valores $k_1 = 5$ y $k_2 = 8$. Entonces:

$$d = \frac{k_1\lambda_1}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{5 \cdot 6563 \cdot 10^{-10}}{0{,}656} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Problema 17-26 Determine la dispersión angular de una red de difracción cuando $\lambda = 5890$ angstroms en el espectro de primer orden. La constante de la red es igual a $2{,}5 \cdot 10$ centímetros.

Solución. Tenemos que: $$(a + b) \operatorname{sen} \theta = k\lambda \qquad (1)$$

Diferenciando (1) obtenemos que:

$$(a + b) \cos \theta \, d\theta = k \, d\lambda \quad \text{o} \quad \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{k}{(a + b) \cos \theta}$$

Al remplazar los datos numéricos del problema se halla, según (1), que $\operatorname{sen} \theta = 0{,}236$, de donde $\theta = 13° \, 38'$. Entonces:

$$\cos \theta = 0{,}972 \quad \text{y} \quad \frac{d\theta}{d\lambda} = 4{,}1 \cdot 10^5 \text{ rad/m}$$

Problema 17-27 La luz amarilla del sodio, que está formada por dos longitudes de onda de 5890 y 5896 angstroms, incide normalmente en una red de difracción de 1500 líneas por centímetro. ¿Cuál es la separación angular de las dos rectas que se observan en el espectro de primer orden y en qué condiciones se ven separadas?

Solución. De la relación $a \operatorname{sen} \theta = m\lambda$ se obtiene $\operatorname{sen} \theta = m\lambda/a = mp\lambda$, siendo $1/a$ el número de líneas por unidad de longitud p.

El cambio de longitud de onda, $\lambda + d\lambda$ produce un cambio $\theta + d\theta$ en el ángulo de difracción; entonces $\cos \theta \, d\theta = mpd\lambda$, de donde:

$$d\theta = \frac{mpd\lambda}{\cos \theta} = \frac{mpd\lambda}{\sqrt{1 - m^2p^2\lambda^2}} = \frac{1 \cdot 1500 \cdot 6 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{1 - 1 \cdot 1500^2 \cdot 5890^2\, 10^{-16}}} = 9{,}04 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

que es la separación de las líneas del sodio de primer orden.

La potencia resolutiva de la red es $m \cdot n$, siendo n el número de líneas de la red. Así,

$$\lambda/d\lambda = m \cdot n \quad \text{o} \quad n = \frac{\lambda}{m} d\lambda$$

Para el espectro de primer orden de la red:

$$n = \frac{5893 \cdot 10^{-8}}{1 \cdot 6 \cdot 10^{-8}} = 982 \text{ líneas}$$

Problema 17-28 Halle la distancia d que separa las capas de átomos del cloruro de sodio.

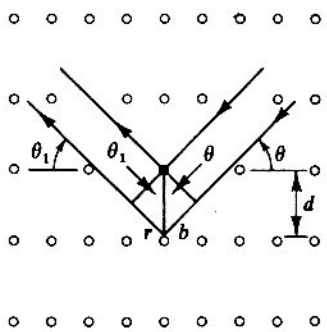


Figura 17-8

Solución. Antes de hallar d vamos a deducir su expresión general.

La Figura 17-8 muestra la sección de un cristal de capas ordenadas. Si el ángulo θ es pequeño tiene lugar una expansión, tal que si el ángulo de incidencia θ y el ángulo θ_1 de expansión máxima son iguales y, por tanto, las distancias a y b también lo son. Si la suma de a y b es un múltiplo de la longitud de onda del rayo x hay un refuerzo de los rayos reflejados. Entonces, $\operatorname{sen} \theta = b/d$ y $\operatorname{sen} \theta_1 = a/d$, de donde $b = d \operatorname{sen} \theta$ y $a = d \operatorname{sen} \theta_1$.

Si $\theta = \theta_1$ hay un refuerzo, entonces $a + b = \lambda$ y, sumando, $\lambda = a + b = 2d \operatorname{sen} \theta$ (d = distancia entre las capas de átomos: λ = longitud de onda: m = orden de refuerzo: θ = ángulo de incidencia).

Para todos los órdenes m, $m = 2d \operatorname{sen} \theta$, de donde:

$$d = \frac{m\lambda}{2 \operatorname{sen} \theta}$$

Ahora, como cada molécula contiene 2 átomos, el peso atómico del sodio es 23 y el del cloro 35,46; entonces, según el número de Avogadro, $23 + 35{,}46 = 58{,}46$ g de cloruro de sodio contienen $6{,}02 \cdot 10^{23}$ moléculas.

Entonces un gramo contiene:

$$\frac{6{,}02 \cdot 10^{23}}{58{,}46} \text{ moléculas/g}$$

Como cada molécula contiene 2 átomos, el número de átomos por gramo es:

$$2 \cdot \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}}{58{,}46} = 2{,}06 \cdot 10^{22} \text{ átomos/g}$$

La densidad de la sal es de 2,164 g/cm^3. Entonces hay:

$$2{,}06 \cdot 10^{22} \text{ (átomos/g)} \cdot 2.164 \text{ (g/cm}^3\text{)} = 4{,}46 \cdot 10^{22} \text{ átomos/cm}^3$$

Como la estructura es cúbica, la distancia entre las capas de átomos es:

$$d = \frac{1}{\sqrt[3]{4{,}46 \cdot 10^{22}}} = 2{,}82 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

Problema 17-29 Un haz de rayos x es desviado por un cristal de calcita con un ángulo de incidencia de primer orden de 7° 35′. La distancia entre las capas de átomos es de $3{,}029 \cdot 10^{-8}$ centímetros. ¿Cuál es la longitud de onda del rayo x?

Solución. $$\lambda = \frac{2d \operatorname{sen} \theta}{m} = \frac{2 \cdot 3{,}029 \cdot 10^{-8} \operatorname{sen} 7° 35'}{1} = 0{,}8 \cdot 10^{-8} \text{ cm} = 0{,}8 \text{ Å}$$

Problema 17-30 Una lente tiene un diámetro de 4 centímetros y una longitud focal de 12,5 centímetros. Dos fuentes de luz de longitud de onda 6000 angstroms se colocan a 1 kilómetro de una lente. *a*) ¿Cuál es la distancia más cercana a la cual se pueden distinguir las dos fuentes? *b*) ¿Cuál es el radio del punto central si una pantalla se coloca en el punto focal de la lente?

Solución. La ecuación para calcular la potencia resolutiva de una lente es $R = \frac{r}{f} = \frac{1{,}22\lambda}{D}$, con λ = = longitud de onda, D = diámetro de la lente, R = potencia resolutiva en radianes, f = longitud focal de la lente, r = radio de la imagen central, S = distancia objeto, d = distancia entre los dos objetos. La distancia entre los puntos imágenes es $d = RS$ y el radio del punto central es $r = \frac{1{,}22\lambda}{D} f$.

a) La distancia entre los objetos es:

$$R = \frac{1{,}22\lambda}{D} = \frac{1{,}22 \cdot 6000 \cdot 10^{-8}}{4} = 1{,}83 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$d = 1 \cdot 10^5 \text{ cm} \cdot 1{,}83 \cdot 10^{-5} = 1{,}83 \text{ cm (separación)}$$

b) El radio del punto central es:

$$r = \frac{1{,}22\lambda}{D} f = 1{,}83 \cdot 10^{-5} \cdot 12{,}5 = 22{,}87 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$$

Problema 17-31 Cuando se fotografió el espectro del Sol se observó que la raya amarilla (λ = 5890 angstroms) en los espectros de los bordes izquierdo y derecho del disco solar estaba desplazada 0,08 angstroms. Calcule la velocidad lineal del movimiento de rotación del disco.

Solución. Al fotografiar uno de los bordes del disco solar (cuando la fuente luminosa se mueve hacia nosotros), $v' = vc/(c - v)$, y al fotografiar el otro borde (la otra fuente luminosa se aleja de nosotros), $v'' = vc/(c + v)$.

Como $v = c/\lambda$, partiendo de las dos relaciones anteriores hallamos que:

$$\Delta\lambda = \frac{2v\lambda}{c}, \quad \text{de donde} \quad v = \frac{c\Delta\lambda}{2\lambda} = 2 \cdot 10^3 \text{ m/seg}$$

Problema 17-32 Cuando se fotografió el espectro de la estrella ε de Andrómeda se encontró que la raya del titanio ($\lambda = 4{,}954 \cdot 10^{-5}$ centímetros) estaba desplazada hacia el extremo violeta del espectro 1.7 angstroms. ¿Cómo se mueve esta estrella con respecto a la tierra?

Solución. El desplazamiento de las rayas espectrales hacia el lado de las ondas cortas es señal de que la estrella se aproxima a nosotros. La velocidad radial de su movimiento (es decir, la velocidad a lo largo de la línea que une la estrella con la tierra) se halla por medio de la correlación $v = \dfrac{c\Delta\lambda}{\lambda} = 103$ km/seg.

Problema 17-33 Una línea espectral cuya longitud de onda normal es de 5800 angstroms se halla que tiene una longitud de onda de 5880 angstroms cuando es emitida por una estrella. ¿Se aproxima o se aleja de la tierra la estrella? ¿A qué velocidad?

Solución. Como la longitud de onda aumenta, la estrella se aleja de la tierra. Para calcular su velocidad:

$$\mp \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \pm \frac{v}{c}, \quad + \frac{5880 - 5800}{5800} = \frac{(-)v}{3 \cdot 10^8 \text{ m/seg}}$$

Como la longitud de onda aumenta (valor positivo), la estrella debe alejarse (valor negativo).

$$\therefore \; -v = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/seg} \cdot 80}{5800} = 4{,}15 \cdot 10^6 \text{ m/seg}$$

Problema 17-34 La nebulosa Hydra se aleja de la tierra a una velocidad aparente de 38 000 mill/seg. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz amarilla? La longitud normal de la luz amarilla es de 5890 angstroms.

Solución. Empleando la fórmula:

$$\mp \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \pm \frac{s}{c}$$

vemos que la nebulosa se aleja (velocidad negativa) y, por tanto, la longitud de onda aumenta (positiva), o:

$$\frac{+\lambda}{5890 \text{ Å}} = \frac{38\,000 \text{ mill seg}}{186\,000 \text{ mill seg}} \qquad \therefore \; \lambda = 1188 \text{ Å}$$

Entonces la longitud de onda observada es:

$$5890 \text{ Å} + 1188 \text{ Å} = 7078 \text{ Å}$$

CAPITULO 18

Relatividad

La teoría de la relatividad es el resultado del estudio sobre las consecuencias que implica la no existencia de un origen universal de referencia (observe que si se estuviese aislado en el Universo no se podría saber si se estaba en movimiento o no, ya que éste es un concepto «relativo», y en ese caso no se tendría punto de referencia).

Esta teoría está basada sobre dos postulados:

1. Las leyes lógicas pueden ser expresadas mediante ecuaciones de la misma forma en todos los sistemas de referencia que se muevan a velocidad constante los unos con respecto a los otros.
2. La velocidad de la luz tiene un valor constante, en el vacío, para cualquier observador, independientemente de su estado de movimiento.

Se llama sistema de referencia inercial a aquel en el que es válida la ley de inercia. Cualquier sistema de referencia que se mueva con velocidad uniforme, v, con respecto a él será otro sistema inercial.

El sistema s' se esta moviendo en el sentido positivo de las x, con una velocidad v con respecto al s.

Transformaciones de Lorentz. Sean dos sistemas de referencia S y S'. Veamos las fórmulas de transformación de coordenadas de sucesos respecto a dichos sistemas (fórmulas análogas a las de Galileo de relatividad clásica).

Tome los ejes x, x' en la dirección del desplazamiento del sistema S' (inercial), siendo y, y' paralelos, así como z, z' y tome como origen de tiempos el momento en que los dos orígenes de coordenadas coinciden: $t = t' = 0$, para $x = x' = 0$.

Las fórmulas de Lorentz resultan de imponer la conservación del intervalo, que es una generalización del concepto de longitud a espacios tridimensionales. (En el espacio de tres dimensiones se definen las rotaciones como aquellas transformaciones lineales que conservan la distancia entre dos puntos.)

Las siguientes ecuaciones darán los valores para la transformación completa de las medidas de un suceso ocurrido en S en las medidas correspondientes realizadas en S':

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad y' = y \qquad z' = z$$

$$t' = \frac{t - \dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

siendo: c = velocidad de la luz. A v/c se le puede representar por β.

Las fórmulas que dan las transformaciones inversas se pueden obtener a partir de éstas, cambiando los valores con comilla por valores sin comilla y viceversa, y sustituyendo (v) por $(-v)$, ya que ha cambiado el papel jugado por los sistemas S y S'.

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad y = y' \qquad z = z'$$

$$t = \frac{t' + \dfrac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Hay que tener en cuenta con estas transformaciones que las mediciones de tiempo y de lugar dependen del sistema de referencia del observador, de manera que dos sucesos que ocurren simultáneamente en un sistema en lugares diferentes no tienen por qué ser simultáneos en otro.

En el caso de que la velocidad v relativa de S y S' sea pequeña con respecto a la velocidad c de la luz, las ecuaciones de Lorentz quedan reducidas a las de Galileo.

Como consecuencia de estas ecuaciones:

Contracción de Lorentz-Fitzgerald. Si una varilla está en reposo respecto del sistema S y está situada a lo largo de su eje x, para un observador de este sistema tendrá una longitud:

$$L = x_2 - x_1$$

Si un observador se desplaza junto al sistema S' con una velocidad v, común a los sistemas, medirá una longitud:

$$L' = x'_2 - x'_1$$

para la barra situada en S, como consecuencia de lo anteriormente dicho, para un cierto instante. Luego:

$$x_1 = \frac{x'_1 + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad x_2 = \frac{x'_2 + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad L = x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Como, por definición: $L' = x'_2 - x'_1$ queda:

$$L' = L\sqrt{1 - \beta^2}$$

Es decir, para un observador que se mueve respecto de la barra, ésta es más corta que para otro en reposo respecto a ella. O lo que es lo mismo, la longitud de un objeto en movimiento con respecto a un observador parece a éste más corta que cuando está en reposo con respecto a él.

Como consecuencia, el volumen de la varilla, o cualquier otro, solo experimentará este acortamiento en la dirección del desplazamiento cuerpo-observador, luego si V es el volumen:

$$V' = V\sqrt{1 - \beta^2}$$

Dilatación del tiempo. Suponga que en un mismo punto de S' se producen dos sucesos en los instantes t'_1 y t'_2, de modo que un reloj situado en este sistema mide un intervalo de tiempo: $T' = t'_2 - t'_1$. Un observador solidario a S verá los sucesos en instantes diferentes, t_1 y t_2, separados por un intervalo $T = t_2 - t_1$. Aplicando las fórmulas de Lorentz:

$$T = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Luego:

$$T' = T\sqrt{1 - \beta^2}$$

O sea, el tiempo medido por un reloj en reposo (un observador) es menor que el medido por otro en movimiento o, por así decirlo, transcurre más lentamente desde el reposo que para el que se mueve con él. O, de otro modo, el reloj en movimiento atrasa respecto del reloj en reposo.

Esta contracción del tiempo ha sido comprobada por el hecho de que en la radiación cósmica llegan a la tierra mesones μ (muones) cuya vida en reposo es de $2{,}2 \times 10^{-6}$ segundos, que sería insuficiente para tan gran trayecto de no ser por su tiempo propio, que es muy superior como consecuencia de la gran velocidad a la que viajan.

Masa relativista. Se puede demostrar, y se trata de un hecho comprobado experimentalmente, que cuando un cuerpo se mueve su masa se incrementa según la expresión:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

siendo:

m = masa en movimiento
m_0 = masa en reposo

Claro que esto, lo mismo que los demás fenómenos relativistas, solo es apreciable a muy altas velocidades (próximas a la de la luz).

Como consecuencia de esto, se tendrá, para la cantidad de movimiento o momento lineal:

$$mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

La conservación de la cantidad de movimiento es válida en la relatividad al igual que en mecánica clásica. Sin embargo, la segunda ley del movimiento de Newton solo es válida en la forma:

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right]$$

Masa y energía. La masa y la energía vienen relacionadas mediante la ecuación de Einstein:

$$E = mc^2$$

Podemos deducir esta expresión a partir de la definición de energía cinética, E_c, de un cuerpo en movimiento, como el trabajo necesario para llevarlo del reposo al movimiento:

$$dE_c = F dx, \quad E_c = \int_0^L F dx$$

como $F = \dfrac{d(mv)}{dt}$, queda: $E_c = \displaystyle\int_0^L \frac{d(mv)}{dt}\,dx$. Calculando: $d(mv) = mdv + vdm$ queda:

$$E_c = \int_0^{mv} v\,d(mv)$$

que teniendo en cuenta el valor relativista de m:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

da:

$$E_c = \int_0^{mv} v\,d\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right)$$

Luego:

$$E_c = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - m_0 c^2 = mc^2 - m_0 c^2 = c^2(m - m_0)$$

siendo, por tanto, la energía total de una masa que se mueve, la suma de dos términos, su energía cinética más su energía en reposo ($m_0 c^2$), es decir:

$$E = mc^2 = E_c + m_0 c^2$$

La energía en reposo es la energía que representa su masa en reposo y que solo se pondrá en manifiesto cuando esta masa, o parte de ella, se desintegre.

Como consecuencia de esto, las unidades de masa y energía pueden utilizarse indistintamente para medir una u otra magnitud y, de hecho, en las medidas de pequeñas masas suele emplearse la unidad energética (1 MeV).

Si la masa final es inferior a la inicial, la energía final será mayor y, recíprocamente, una pérdida de energía puede ser debida a una ganancia de masa.

Unidades. Electrón voltio: Un electrón voltio (1 eV) es la energía que adquiere un electrón al someterlo a una diferencia de potencial de 1 voltio.

1 eV = 1 volt. $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ culombios = $1{,}60 \cdot 10^{-12}$ ergios.
1 keV = 10^3 eV.
1 MeV = 10^6 eV.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 18-1 ¿Cuál es la relación m/m_0 para un cuerpo que se mueve con una velocidad igual al 10 % de la velocidad de la luz? ¿Y para una velocidad del 95 % de la velocidad de la luz?

Solución. Empleando la fórmula:

$$m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad m/m_0 = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Para un 10 % de la velocidad de la luz, $v = 10\%\,c = 0{,}1c$, siendo c la velocidad de la luz. Por tanto:

$$m/m_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}1c)^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}01}} = \frac{1}{0{,}995} = 1{,}005$$

lo cual quiere decir que la masa aumentó en:

$$1{,}005 - 1 \quad \text{o} \quad \frac{0{,}005}{1000}(100) = 0{,}5\,\%$$

Para una velocidad 95 $^0/_0$ de la velocidad de la luz, $v = 95\ ^0/_0 c = 0{,}95c$, por tanto,

$$m/m_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}95c)^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}9025}} = \frac{1}{0{,}312} = 3{,}2$$

por consiguiente, la masa ha aumentado en $3{,}2 - 1 = 2{,}2(100) = 220\ ^0/_0$.

Problema 18-2 Si una masa de 0.25 unidades atómicas de masa se puede desintegrar, ¿cuántos julios se producen? ¿Cuántos MeV?

Solución. Empleando la fórmula $E = \Delta mc^2$, E se da en julios cuando Δm se da en kilogramos, y c en metros por segundo; debemos convertir las unidades atómicas de masa a kilogramos.

1 u.a.m. es 1/16 de la masa de un átomo de oxígeno ${}_8O^{16}$ y es igual a $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg; por tanto, 0,25 u.a.m. $= 0{,}25$ u.a.m. $\cdot\ 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg/u.a.m. $= 0{,}415 \cdot 10^{-27}$ kg. La velocidad de la luz es $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/seg, entonces:

$$E = mc^2 = 0{,}415 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}\ (2{,}988 \cdot 10^8\ \text{m/seg})^2 = 3{,}73 \cdot 10^{-11}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{seg}^2 = 3{,}73 \cdot 10^{-11}\ \text{J}$$

Para cambiar esto a MeV: 1 MeV $= 1{,}602 \cdot 10^{-13}$ J.

$$\therefore\ 3{,}73 \cdot 10^{-11}\ \text{J} = \frac{3{,}73 \cdot 10^{-11}\ \text{J}}{1{,}602 \cdot 10^{-13}\ \text{J/MeV}} = 233\ \text{MeV}$$

Problema 18-3 Calcule la masa equivalente a 25 MeV.

Solución. Se puede emplear la fórmula $E = \Delta mc^2$, entonces $\Delta m = E/c^2$, E debe darse en julios para hallar m en kilogramos, por tanto, como 1 MeV $= 1{,}602 \cdot 10^{-13}$ J,

$$25\ \text{MeV} = 25\ \text{MeV}\,(1{,}602 \cdot 10^{-13}\ \text{J/MeV}) = 4 \cdot 10^{-12}\ \text{J}$$

Entonces:

$$\Delta m = E/c^2 = \frac{4 \cdot 10^{-12}\ \text{J}}{(2{,}998 \cdot 10^8\ \text{m/seg})^2} = \frac{4 \cdot 10^{-12}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{seg}^2}{(2{,}998 \cdot 10^8\ \text{m/seg})^2} = 4{,}44 \cdot 10^{-29}\ \text{kg}$$

Para cambiar esto a u.a.m., como 1 u.a.m. $= 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg,

$$4{,}44 \cdot 10^{-29}\ \text{kg} = \frac{4{,}44 \cdot 10^{-29}\ \text{kg}}{1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg/u.a.m.}} = 0{,}0267\ \text{u.a.m.}$$

Problema 18-4 Calcule la energía cinética de un electrón que se mueve a una velocidad de $7 \cdot 10^7$ metros por segundo. La masa del electrón en reposo es de $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kilogramos.

Solución. Empleando la fórmula $E = (m - m_0)c^2$, halle m:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{\sqrt{1 - \dfrac{(7 \cdot 10^7\ \text{m/seg})^2}{(3 \cdot 10^8\ \text{m/seg})^2}}} = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{\sqrt{1 - 5{,}44 \cdot 10^{-2}}} = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{0{,}972} = 9{,}37 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$$

Así,

$$m - m_0 = 9{,}37 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} - 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} = 0{,}26 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$$

Entonces:

$$E = (m - m_0)c^2 = 0{,}26 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot (3 \cdot 10^8\ \text{m/seg})^2 = 2{,}38 \cdot 10^{-15}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{seg}^2 = 2{,}38 \cdot 10^{-15}\ \text{J}$$

Problema 18-5 ¿Cuántos kilovatios hora de energía se pueden producir al desintegrar completamente 10^{-3} kilogramos de agua?

Solución. Como $E = \Delta mc^2$, $E = 10^{-3}\ \text{kg} \cdot (3 \cdot 10^8\ \text{m/seg})^2 = 9 \cdot 10^{13}$ J. Como un julio es equivalente a un vatio por segundo, la energía producida es $9 \cdot 10^{13}$ W · seg. Ahora, cambiando (vatios · segundo) a vatios por hora se obtiene:

$$9 \cdot 10^{13}\ \text{W} \cdot \text{seg} = \frac{9 \cdot 10^{13}\ \text{W} \cdot \text{seg}}{3600\ \text{seg/h}} = 2{,}5 \cdot 10^{10}\ \text{W} \cdot \text{h}$$

Finalmente, para cambiar (vatios · hora) a (kilovatios · hora) tenemos:

$$2{,}5 \cdot 10^{10}\ \text{W} \cdot \text{h} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{10}\ \text{W} \cdot \text{h}}{1000\ \text{W/kW}} = 2{,}5 \cdot 10^{7}\ \text{kWh} = 25\ \text{millones de kWh}$$

Problema 18-6 Halle la velocidad de un mesón sabiendo que su energía total es 10 veces mayor que su energía en reposo.

Solución. La energía total del mesón está compuesta por su energía cinética E_1 y su energía propia E_2 o energía en reposo, siendo:

$$E_1 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) \quad \text{y} \quad E_2 = m_0c^2 \quad \text{con} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Por tanto, la energía total será:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Según las condiciones del problema, $E\,E_2 = 10$, es decir,

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 10$$

De aquí se deduce que $\beta = v/c = 0{,}995$ y $v = 2{,}985 \cdot 10^8$ m seg.

Problema 18-7 Halle la pérdida de masa que se produce al formarse una molécula-kilogramo de agua sabiendo que la reacción de composición del agua es la siguiente:

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O + 5{,}75 \cdot 10^5\ \text{kJ}$$

Solución. $\Delta m = 3{,}2 \cdot 10^{-9}$ kg/kmol. De esta forma, como resultado de la reacción no se obtienen 18 kg de agua, sino $3{,}2 \cdot 10^{-9}$ kg menos. Pero esta magnitud está fuera de límite de apreciación de las balanzas más exactas. En otras reacciones químicas la variación de la masa también es de este orden.

Problema 18-8 La vida media de un π^+ mesón es $2{,}5 \cdot 10^{-8}$ seg. Si un haz de π^+ mesones lleva una velocidad de $(99/100)c$, ¿qué distancia promedio recorre un mesón antes de desaparecer? ¿Cuál es su valor si la dilatación relativista del tiempo no existe?

Solución. Si el sistema de referencia S' se mueve con los mesones la vida media de los mesones es $2{,}5 \cdot 10^{-8}$ segundos. Si se observa desde un sistema S fijo, con respecto al cual S' se mueve a una velocidad de $(99/100)c$, se observará que su vida media es más larga. Porque según la fórmula que da la dilatación del tiempo:

$$T = \frac{T'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{1 - 0{,}99^2}}\ \text{seg} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-8}}{0{,}141}\ \text{seg}$$

La distancia que ha recorrido en este tiempo es $(99/100)c \cdot T$.

$$\therefore\ d = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-8}}{0{,}141}\ \text{seg} \cdot (0{,}99) \cdot 3 \cdot 18^8\ \text{m/seg} = 52{,}7\ \text{m}$$

Si no existe la dilatación del tiempo, la distancia recorrida es d_0, siendo:

$$d_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-8}\ \text{seg} \cdot (99/100) \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m/seg} = 7{,}4\ \text{m}$$

Problema 18-9 ¿Con qué velocidad se mueve un electrón si su energía cinética difiere en 10 % del valor que tendría si no se tienen en cuenta los efectos relativistas? ¿Cuál es el valor de la energía cinética del electrón?

Solución. Sea m_0 la masa en reposo y m la masa a una velocidad v. La energía cinética está dada por:

$$E = (m - m_0)c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right) = m_0c^2\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right] =$$

$$= m_0c^2\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \cdots\right) = \frac{1}{2}m_0v^2\left(1 + \frac{3}{4}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

En la última igualdad se despreciaron los términos de orden mayor a v^2/c^2. Ahora, $\frac{1}{2}m_0v^2$ es la expresión no relativista de la energía cinética de una partícula. Para el electrón del problema:

$$\frac{1}{2}m_0v^2\left(1 + \frac{3}{4}\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{110}{100} \cdot \frac{1}{2}m_0v^2 \quad \therefore\ v^2 = \frac{4}{30}c^2 \quad \therefore\ v = 0{,}36\ c$$

$$E = \frac{110}{100} \cdot \frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{110}{100} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9{,}108 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot \frac{4}{30} \cdot 2{,}998^2 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{seg}^2$$

$$= 5{,}98 \cdot 10^{-15}\ \text{J} = 37375\ \text{eV}$$

RADIACTIVIDAD

La radiactividad natural es una propiedad atómica inherente de ciertas sustancias y que consiste en la emisión de ciertos rayos, los α, β y γ. Los α son iones de helio (núcleos de helio) dotados con una velocidad de alrededor de $2 \cdot 10^4$ kilómetros por segundo. Los β son haces de cargas negativas como los electrones, con velocidades muy próximas a la de la luz (parecidos a los rayos catódicos, ya que aunque son de la misma naturaleza, estos últimos tienen menor velocidad). Los rayos γ están dotados de la velocidad de la luz y son iguales que los rayos X, pero con una longitud de onda mucho más pequeña; su emisión, por tanto, no alterará ni el número atómico ni el másico. Dícese esto último, pues, como el lector ya sabrá, la radiactividad es un fenómeno nuclear (de ahí la diferencia entre los rayos β y los catódicos y la que hay entre los X y los γ.)

Dado un elemento se suele representar con su símbolo afectado de un supra y un subíndice numéricos:

$$_ZX^A$$

A = número másico = número de neutrones + número de protones
Z = número atómico = número de protones

Dado un átomo radiactivo es imposible predecir el instante en que se desintegrará, pues es un fenómeno aleatorio en el que no influyen las condiciones físicas ni químicas. Pero sí se puede saber que si tenemos una muestra con un gran número de átomos radiactivos, por tér-

mino medio, el número de los que se desintegran en el pequeño intervalo de tiempo dt es proporcional al número N_0 de átomos radiactivos preexistentes, es decir:

$$dN = -\lambda N_0 dt$$

Donde:

dN = núcleos desintegrados en el tiempo dt
N_0 = núcleos iniciales, radiactivos
λdt = probabilidad que tiene un núcleo en desintegrarse en el tiempo dt
λ = constante de probabilidad de desintegración por unidad de tiempo

El signo menos indica la contraposición del proceso, los núcleos desintegrados se «van» de los no desintegrados (N decrece al aumentar t). Si se quiere puede prescindirse de él para calcular valores.

Por definición, se llama actividad de la muestra a:

$$a = \frac{dN}{dt}$$

que si se quiere poner en función de la masa será:

$$a = \frac{dN}{m\,dt}$$

Integrando la ecuación diferencial $dN = \lambda N_0 dt$:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda\,dt \qquad \int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt$$

$$\ln N - \ln N_0 = -\lambda t \qquad \text{luego: } N = N_0 e^{-\lambda t}$$

que da el número de núcleos desintegrados en el tiempo t en función de la probabilidad de desintegración, por unidad de tiempo, y del número de núcleos sin desintegrar que había para $t = 0$. Luego:

como:
$$\left.\begin{aligned} a &= -\frac{dN}{dt} \\ N &= N_0 e^{-\lambda t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

Se pueden poner estas fórmulas en función de masa de la sustancia, en gramos, si tenemos en cuenta que:

$$N = \frac{m}{M} A_v$$

siendo:

m = gramos de sustancia
M = masa molecular
A_v = número de Avogadro

Luego la ecuación $dN = -\lambda N_0 dt$ se podrá poner así:

$$dm = -\lambda m\,dt \quad \text{o} \quad \Delta m = -\lambda m \Delta t$$

Haciendo $m = 1$ gramo y $\Delta t = 1$ segundo, se ve que la constante de desintegración representa la cantidad de cuerpo radiactivo que se desintegra cada segundo en cada gramo. Su valor recíproco se llama vida media o periodo de vida:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

Que se puede considerar como la media aritmética de las vidas de los núcleos (suma de los tiempos «vividos» por cada átomo dividida por el número de átomos existentes al principio):

$$\tau = \frac{\int_0^{N_0} t\,dN}{N_0}$$

con

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \qquad dN = -N_0 \lambda e^{-\lambda t}\,dt$$

luego:

$$\tau = -\frac{1}{N_0}\int_{\infty}^{0} tN_0\lambda e^{-\lambda t}\,dt = \int_0^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}$$

Se llama periodo de semidesintegración, periodo de vida probable, semivida o semiperiodo, al tiempo necesario para que el número de átomos radiactivos se reduzca a la mitad. Esta característica es la más usada para expresar la actividad de una muestra radiactiva, su valor es función de la constante de desintegración. Se obtiene haciendo en $N = N_0 e^{-\lambda t}$, $N = N_0/2$ y $t = T$, con lo que queda:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}$$

Tomando logaritmos neperianos y despejando T, o semiperiodo:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0{,}693}{\lambda}$$

Unidades

1 curie $= 3{,}70 \cdot 10^{10}$ desintegraciones/segundo.
1 mc $= 10^{-3}$ curie $= 3{,}70 \cdot 10^{7}$ desintegraciones/segundo.
1 μc $= 10^{-6}$ curie $= 3{,}70 \cdot 10^{4}$ desintegraciones/segundo.

Nota. Recuérdese que:

1 kilomol de un isótopo tiene una masa igual al peso atómico del isótopo expresado en kilogramos.

1 kilomol contiene un número de átomos igual al número de Avogadro. (Av $= 6{,}025 \cdot 10^{26}$ átomos/kilomol.)

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 18-10 ¿Cuántos átomos de emanación de radio (radón) se desintegrarán en un día si se dispone de 1 millón de átomos?

Solución. El periodo de semidesintegración del radón es 3,82 días solamente. Para hallar el número de átomos de radón que se desintegran cada día hay que utilizar la fórmula $N = N_0 e^{-\lambda t}$. Entonces el número buscado será:

$$\Delta N = N_0 - N = N_0 - N_0 e^{-\lambda t} = N_0(1 - e^{-\lambda t})$$

Remplazando los datos numéricos, se halla que $\Delta N = 10^6(1 - 0{,}833) = 167\,000$ átomos por día.

Problema 18-11 El uranio natural es una mezcla de los tres isótopos siguientes: ${}_{92}U^{234}$, ${}_{92}U^{235}$ y ${}_{92}U^{238}$. La cantidad de uranio ${}_{92}U^{234}$ que entra en esta mezcla es insignificante (0,0006 %), la parte correspondiente al uranio ${}_{92}U^{235}$ representa un 0,71 %, y el resto de la masa (99,28 %) está formada por el uranio ${}_{92}U^{238}$. Los semiperiodos de estos isótopos son iguales, respectivamente, a $2{,}5 \cdot 10^5$ años, $7{,}1 \cdot 10^8$ años y $4{,}5 \cdot 10^9$ años. Calcule el tanto por ciento con que cada isótopo contribuye a la radiactividad total del uranio natural.

Solución. El porcentaje de radiactividad con que cada isótopo contribuye a la radiactividad total del uranio natural vendrá determinada por la relación entre el número de desintegraciones por segundo de cada isótopo y el número total de desintegraciones por segundo del uranio natural. Llamemos m a la masa del uranio natural. Entonces las masas de los isótopos serán, respectivamente, $m_1 = 6 \cdot 10^{-6}\, m$, $m_2 = 7{,}1 \cdot 10^{-3} m$ y $m_3 = 99{,}28 \cdot 10^{-2} m$. El número de desintegraciones por segundo que se producen en cada isotopo será:

$$\Delta N_1 = \frac{\ln 2}{T_1} N_1 \Delta t = \frac{\ln 2\, A_r m_1 \Delta t}{T_1 p_1}$$

$$\Delta N_2 = \frac{\ln 2\, A_r m_2 \Delta t}{T_2 p_2}$$

$$\Delta N_3 = \frac{\ln 2\, A_r m_3 \Delta t}{T_3 p_3}$$

donde A_r en el número de Avogadro; T_i el periodo de semidesintegración del isótopo, y p_i su peso atómico. De aquí se deduce que la relación que se busca para cada uno de los isótopos será:

$$x_i = \frac{\Delta N_i}{\Delta N_1 + \Delta N_2 + \Delta N_3} = \frac{\dfrac{m_i}{p_i T_i}}{\dfrac{m_1}{p_1 T_1} + \dfrac{m_2}{p_2 T_2} + \dfrac{m_3}{p_3 T_3}}$$

Remplazando los datos numéricos se puede ver que toda la radiactividad del uranio natural se debe al isótopo ${}_{92}U^{238}$, puesto que la radiactividad de los isótopos ${}_{92}U^{235}$ y ${}_{92}U^{234}$ es tan pequeña que se desprecia.

Problema 18-12 ¿Cuánto tarda una muestra radiactiva, de vida media 5 días, en disminuir al 1 % de su valor original?

Solución. Sea n el número de periodos de vida media, entonces la cantidad que queda activa después de n periodos será $(1/2)^n$ del valor original. Esta debe ser igual al 1 % del valor original, por tanto:

$$(1/2)^n = 1\,\% = 0{,}01 \quad \therefore\ n \ln (1/2) = \ln 0{,}01 \quad \therefore\ n = \frac{\lg (0{,}01)}{\lg \dfrac{1}{2}} = \frac{-2}{-0{,}301} = 6{,}64$$

Entonces deben haber transcurrido 6,64 periodos de vida media para reducir su actividad al 1 % de su valor original. Como cada periodo de vida media es de 5 días,

$$6{,}64 \text{ periodos de vida media} = 6{,}64 \text{ periodos de vida media} \cdot \frac{\text{días}}{\text{periodos de vida media}} = 33{,}2 \text{ días}$$

Problema 18-13 La energía cinética de la partícula α que emite el átomo de radio al desintegrarse radiactivamente es igual a 4,78 MeV. Halle: *a*) la velocidad de esta partícula; *b*) la energía total que se libera al ser emitida.

Solución. *a*) $v = 1{,}52 \cdot 10^7$ m/seg.

b) La energía total que se libera al ser emitida la partícula α es igual a la suma de su energía cinética E_1 y la energía cinética E_2 del núcleo residual. Por tanto,

$$E = E_1 + E_2 \tag{1}$$

Además se cumple la ley de la conservación de la cantidad de movimiento. Como antes de la desintegración la cantidad de movimiento del sistema era igual a cero, después de ella:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 \tag{2}$$

De (2) se obtiene:

$$(m_1 v_1)^2 = \frac{m_1 v_1^2}{2} 2m_1 = E_1 2m_1 = (m_2 v_2)^2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} 2m_2 = 2m_2 E_2$$

Según (1):

$$E = E_1 + \frac{2m_1 E_1}{2m_2} = E_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = E_1 \frac{m_2 + m_1}{m_2}$$

Al remplazar los datos numéricos en esta ecuación se obtiene: $E = 4{,}87$ eV.

Problema 18-14 El plomo presente en el mineral de uranio es el producto final de la desintegración de este último, y, por tanto, conociendo la proporción en que se encuentran la cantidad de uranio y la de plomo se puede determinar su edad. Determine la edad de un mineral de uranio sabiendo que en él a cada kilogramo de uranio $_{92}U^{238}$ le corresponden 320 gramos de plomo $_{82}Pb^{206}$.

Solución. Tenemos que:

$$N_p = N_u \left(1 - e^{-\frac{0{,}693t}{T_u}}\right) \quad \therefore \quad \frac{m_p}{p_p} = \frac{m_u}{p_u} \left(1 - e^{-\frac{0{,}693t}{T_u}}\right)$$

de donde $t = 3 \cdot 10^9$ años.

Problema 18-15 Se han mezclado 10 miligramos del isótopo radiactivo $_{20}Ca^{45}$ con 30 miligramos del isótopo no radiactivo $_{20}Ca^{40}$. ¿Cuánto disminuirá la actividad específica de la preparación?

Solución. Antes de hacer la mezcla, la actividad de la preparación era igual a:

$$a_1 = \frac{\Delta N}{m_1 \Delta t} = \frac{\lambda N}{m_1} = \frac{\ln 2 A_v m_1}{T p_1 m_1} = \frac{\ln 2 A_v}{T p_1} \tag{1}$$

Después de la mezcla:

$$a_2 = \frac{\Delta N}{(m_1 + m_2)\Delta t} = \frac{\ln 2 A_v m_1}{T p_1 (m_1 + m_2)} \tag{2}$$

De (1) y (2) se obtiene:

$$\Delta a = \frac{\ln 2 A_v}{T p_1} \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = \frac{\ln 2 A_v m_2}{T p_1 (m_1 + m_2)} = 4{,}9 \cdot 10^{17} \text{ desint/seg} \cdot \text{kg} = 1{,}32 \cdot 10^7 \text{ Ce/kg}$$

ATOMO DE BOHR

El modelo atómico de Bohr, aunque no es exacto (con respecto a la realidad), da una idea aproximada de la estructura atómica. En su construcción aplicó las ideas cuánticas.

Anteriormente a Bohr, Rutherford supuso que el átomo consistía en un pequeño núcleo positivo alrededor del cual giraban los electrones a distancias relativamente grandes. Para explicar el equilibrio dinámico de este sistema Rutherford suponía que los electrones describían alrededor del núcleo órbitas circulares o elípticas, pero este supuesto era inconsistente; pues según las previsiones clásicas, el electrón, al describir órbitas cerradas, debería estar sometido a una aceleración centrípeta y toda carga sometida a una aceleración emite energía electromagnética a costa de una disminución del potencial del sistema. Como cada átomo puede considerarse como un sistema aislado, el radio de la órbita debería disminuir hasta caer finalmente los electrones al núcleo. Es decir, el modelo de Rutherford no resultaba ser estable.

Cuando un átomo emite radiación lo hace en forma de cortos destellos y no de modo continuo como correspondería al anterior modelo. Está cuantificada la emisión.

Viendo esto, Bohr se apartó de los caminos clásicos postulando en 1913 lo siguiente:

1. Cualquier sistema atómico posee unos estados «estacionarios» tales que en cada uno de ellos no emite energía. Estas capas o «niveles energéticos» vienen caracterizadas por las correspondientes energías de ionización: E_i.

2. Cada proceso de emisión o recepción de energía por parte de los átomos es debido al paso de un electrón de un nivel energético a otro. La frecuencia de la correspondiente radiación viene dada por :

$$\nu = \frac{E_i - E_j}{h}$$

Siendo h la constante de Planck:

$$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \text{ julios} \cdot \text{segundo}$$

Las energías vendrán en julios y la frecuencia de la radiación en seg^{-1} o hertzios.

3. Salvo en lo relativo a estos postulados especiales el equilibrio del átomo viene regido por las leyes de la mecánica clásica.

4. Solo son estados o niveles estacionarios posibles aquellos en los que 2π veces el ímpetu angular del electrón es un múltiplo entero de la constante de Planck:

$$2\pi I\omega = nh$$

siendo:

I = momento de inercia = mr^2
ω = velocidad angular
n = número entero = 1, 2, 3, ...
p = cantidad de movimiento

También:

$$2\pi I\omega = 2\pi mr \cdot \omega = nh$$

pero

$$v = \frac{v}{r} mr \cdot v = p$$

Luego:

$$2\pi rp = nh$$

$$p = n \frac{h}{2\pi r}$$

O sea, también se puede enunciar este postulado diciendo que el momento cinético de un electrón, girando alrededor del núcleo, es un múltiplo de $h/2\pi$:

$$mvr = nh/2\pi \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Clásicamente la condición de equilibrio se expresará como la igualdad entre la fuerza centrípeta y la fuerza electrostática (que se oponen mutuamente) a las que está sometido el electrón al girar en órbita alrededor del núcleo:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Ze \cdot e}{r^2} \quad \text{en el sistema M.K.S. racionalizado}$$

siendo:

e = carga del electrón
Ze = carga del núcleo

De esto último se puede calcular el valor del radio para una órbita n, teniendo en cuenta que $p = \dfrac{nh}{2\pi r}$:

$$mv^2 r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot Ze^2$$

$$mv = \frac{nh}{2\pi r} \qquad \rightarrow \text{ eliminando } v \text{ entre las dos}$$

$$r_n = \frac{n^2 h^2 \varepsilon_0}{\pi \cdot m \cdot Z \cdot e^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Así, para el hidrógeno, el radio de la órbita correspondiente al estado fundamental ($n = 1$), que es la más interna, resulta ser:

$$r_1 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi \cdot m \cdot e^2} = 0{,}523 \cdot 10^{-8}\ \text{cm} = 0{,}523\ \text{Å}$$

De modo que parece aconsejable prescindir de las correcciones relativistas en una primera aproximación, pero los resultados que así se alcanzan están en desacuerdo con los datos experimentales.

La energía potencial del electrón en el campo electrostático creado por el núcleo vale:

$$U = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

que es el trabajo que habría que realizar para llevar al electrón desde su órbita al infinito (origen de potencial). La energía cinética es, prescindiendo de la corrección relativista:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\,\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Luego la energía total del electrón en la órbita n será la suma de sus energías cinética y potencial en ella:

$$w = E_c + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2}\,\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{1}{2}\,\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Si se sustituye el valor de r:

$$w_n = -\frac{Z^2me^4}{8\varepsilon_0^2h^2n^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Las energías salen negativas indicando el hecho de que los electrones están ligados al átomo. Al nivel más bajo, w_1, se le llama estado fundamental, y a los siguientes, w_2, w_3, w_4, ..., estados excitados. Al crecer el número cuántico n, la energía se aproxima cada vez más a cero; o sea, que en el límite, $n = \infty$, $w_\infty = 0$, el electrón «no está ligado» al núcleo, es decir, se tiene un electrón libre a partir de esta energía nula en adelante.

Cuando un electrón «cae» de una órbita j a otra i libera una energía en forma de radiación, que como se dijo antes será:

$$(j > i) \qquad w_j - w_i = h\nu$$

Sustituyendo el valor encontrado para w se puede encontrar la frecuencia de la emisión:

$$\nu = \frac{w_j - w_i}{h} = \frac{mZ^2e^4}{8h^3\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2}\right)$$

Si llaman: $R = \dfrac{me^4}{8h^3\varepsilon_0^2c} = 109\,737{,}31\ \text{cm}^{-1}$ constante de Rydberg, tendrán, siendo c la velocidad de la luz o velocidad de la radiación:

$$\nu = RcZ^2\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2}\right)$$

Utilizando el concepto de número de ondas, $\overline{\nu} = 1/\lambda$, tendrán:

$$\overline{\nu} = RZ^2\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2}\right)$$

Recuérdese que:

$$c = \frac{\lambda}{T},\ \lambda = cT = \frac{c}{\nu}, \quad \text{por tanto,} \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c}$$

Con esto se ve que la radiación emitida por un átomo excitado contiene solamente ciertas longitudes de onda o frecuencias. Estas longitudes de onda, además, están dentro de determinadas series que dependen del número cuántico n_i.

Para el átomo de hidrógeno, $Z = 1$, encontraron:

Parte del espectro visible: serie de Balmer

$$n_i = 2, \quad n_j = 3, 4, 5, \ldots$$

$$\frac{1}{\lambda} = \overline{\nu} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_j^2}\right)$$

En la región ultravioleta: serie de Lyman

$$n_i = 1, \quad n_j = 2, 3, 4, \ldots$$

$$\frac{1}{\lambda} = \overline{\nu} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n_j^2}\right)$$

En la región infrarroja se encontraron tres series:

Serie de Paschen: $n_i = 3, \quad n_j = 4, 5, 6, \ldots$

$$\frac{1}{\lambda} = \bar{\nu} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n_j^2}\right)$$

Serie de Brackett: $n_i = 4, \quad n_j = 5, 6, 7, \ldots$

$$\frac{1}{\lambda} = \bar{\nu} = R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n_j^2}\right)$$

Serie de Pfund: $n_i = 5, \quad n_j = 6, 7, 8, \ldots$

$$\frac{1}{\lambda} = \bar{\nu} = R\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n_j^2}\right)$$

El valor de R es el mismo para todas las ecuaciones.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 18-16 Halle la longitud de onda de las primeras tres rayas visibles del espectro del hidrógeno.

Solución. $R = 109\,678 \text{ cm}^{-1}$; $n = 3, 4, 5$.

a) La longitud de onda para $n = 3$ es:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right] = 109\,678\left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right] \quad \therefore \lambda = 6562 \text{ Å}$$

b) Para $n = 4$:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right] \quad \therefore \lambda = 4861 \text{ Å}$$

c) Para $n = 5$:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right] \quad \therefore \lambda = 4340 \text{ Å}$$

Problema 18-17 Halle el radio del primer electrón cuántico en el átomo de hidrógeno.

Solución. En el sistema cgs, el radio de la órbita está dado por:

$$r = \frac{n^2h^2}{4\pi^2me^2}; \; n = 1, 2, 3, \ldots; \; h = 6{,}62 \cdot 10^{-27} \text{ erg/seg}; \; m = 9{,}11 \cdot 10^{-28} \text{ g}; \; e = 4{,}8 \cdot 10^{-10} \text{ statcoul}$$

Entonces:

$$r = \frac{1 \cdot (6{,}62 \cdot 10^{-27})^2}{4\pi^2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-28} \cdot (4{,}8 \cdot 10^{-10})^2} = 5{,}3 \cdot 10^{-9} \text{ cm}$$

Problema 18-18 Halle la velocidad del primer electrón orbital del átomo de hidrógeno.

Solución. La velocidad de un electrón cuantizado, aplicando la condición de equilibrio en el sistema cgs $k = 1$, es:

$$k\frac{e^2}{r^2} = mv^2/r, \text{ de donde } r = e^2/mv^2$$

Cuantizando el momento centrípeto angular se obtiene $mvr = nh/2\pi$, de donde $r = nh/2\pi mv$. Igualando las dos expresiones anteriores tenemos que:

$$\frac{nh}{2\pi mv} = \frac{e^2}{mv^2} \quad \therefore v = \frac{2\pi e^2}{nh}$$

La velocidad en el sistema cgs es:

$$v = \frac{2\pi(4{,}8 \cdot 10^{-10})^2}{1 \cdot 6{,}62 \cdot 10^{-27}} = 2{,}19 \cdot 10^8 \text{ cm/seg}$$

Problema 18-19 Halle las longitudes de onda, mínima y máxima, de las rayas espectrales del hidrógeno en la parte visible del espectro.

Solución. Las longitudes de onda de las rayas espectrales de todas las series del hidrógeno se determinan por la fórmula:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2}\right) \tag{1}$$

Si $n_i = 1$ y $n_j = 2, 3, 4, \ldots$, tenemos la serie de Lyman, que se encuentra en la región ultravioleta.
Si $n_i = 2$ y $n_j = 3, 4, 5, \ldots$, es la serie de Balmer, de la región visible.
Si $n_i = 3$ y $n_j = 4, 5, 6, \ldots$, es la serie de Paschen
Si $n_i = 4$ y $n_j = 5, 6, 7, \ldots$, es la serie de Brackett } en la región infrarroja.
Si $n_i = 5$ y $n_j = 6, 7, 8, \ldots$, es la serie de Pfund.

Como vemos, a la serie de la región visible del espectro le corresponden los valores $n_i = 2$ y $n_j = 3, 4, 5, \ldots$ Es evidente que la longitud de onda mínima de las rayas espectrales de esta serie será la que se obtiene cuando $n_j = \infty$. En este caso, según (1), tendremos que:

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{R}{4}, \text{ o sea, } \lambda_1 = \frac{4}{R} = 3{,}65 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

La mayor longitud de onda corresponderá a $n = 3$ y será $\lambda_2 = 6{,}56 \cdot 10^{-7}$ m. Por tanto, el espectro visible del hidrógeno se encuentra en el intervalo de longitudes de onda comprendido entre $\lambda_1 = 3650$ Å y $\lambda_2 = 6560$ Å.

Problema 18-20 Determine el potencial de ionización del átomo de hidrógeno.

Solución. El potencial de ionización U_i del átomo viene determinado por la relación $eU_i = W_i$ donde W_i es el trabajo necesario para alejar el electrón desde su órbita normal hasta el infinito. Para el átomo de hidrógeno:

$$W_i = h\nu = hcR\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2}\right)$$

Si $n_i = 1$ y $n_j = \infty$ el trabajo $W_i = hcR$ y el potencial de ionización $U_i = W_i/e = hcR/e = 13{,}6$ V.

Problema 18-21 *a*) ¿Qué energía mínima en electrón voltios deberán tener los electrones para que al chocar con los átomos de hidrógeno los exciten y aparezcan todas las rayas de todas las series del espectro de éste? *b*) ¿Qué velocidad mínima deberán tener estos electrones?

Solución. *a*) Todas las rayas de todas las series del espectro del hidrógeno aparecen al ionizarse el átomo de éste. Esto ocurre cuando la energía de los electrones es de 13,6 voltios (vea el problema anterior).

b) $v_{\min} = \sqrt{\frac{2eV_i}{m}} = 2{,}2 \cdot 10^6$ m/seg

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. ¿Cuánto trabajo se debe realizar para elevar la velocidad de un electrón desde $1{,}2 \cdot 10^8$ m/seg hasta $2{,}4 \cdot 10^8$ m/seg?
2. Determinar la velocidad de un electrón de 0,2 Mev, de acuerdo con la mecánica clásica y con la relativista.
3. El tritio, H^3 tiene una semivida de 12,5 años, para la desintegración beta. Después de 25 años ¿qué fracción de una muestra permanece sin desintegrar?
4. Un gramo de radio tiene una actividad de 1 curie. Determinar la semivida del radio.
5. Determinar la longitud de onda de la línea espectral correspondiente a la transición en el hidrógeno del estado 6 al estado 4.

Bibliografía

Baez, V. Albert: *The New College Physics*. W. H. Freeman & Co. San Francisco, 1967.
Berkeley Physics Course, Vols. I-IV. McGraw-Hill. Nueva York, 1969.
Borowitz-Beiser: *Essential of Physics*. Addison Wesley. Reading, 1965.
→ Bueche, F.: *Fundamentos de Física*. McGraw-Hill. Nueva York, 1970.
Dupeyrat, R.: *Problèmes de Mathemátiques et de Physique*. Dunod. París, 1970.
Eymard et Manot: *Exercices de Sciences Physiques*. Vuibert. Paris, 1970.
*→ Finn, A.: *Física*. Vols. I, II, III. Addison Wesley, Reading, 1971.
Fowler; Meyer, A.: *Physics*. Allyn & Bacon. Boston, 1965.
Hazen, W. E.; Pidd, R. W.: *Física*. Editorial Norma. Cali, 1965.
Le Morvan: *Exercices de Physique*. Vuibert. Paris, 1967.
Physical Science Study Committee: *Física*. Reverté. Madrid, 1968.
Pollack, H. W.: *Applied Physics*. Prentice-Hall. Nueva York, 1964.
→ *Problems in Undergraduate Physics*. Vols. I-IV. Fizmatgiz. Moscú, 1960.
**→ Resnick, Halliday: *Física*. Vols. I, II. SECSA. México, 1960.
Sbornik I Zbrannykh Zadach po Fizike. Fizmatgiz. Moscú, 1959.
→ Scherrer, P.; Stoll, P.: *Problemas de Física*. Vols. I-III. Editorial Alhambra. Madrid, 1969.
**→ Sears-Zemansky: *Physics*. Addison Wesley. Reading, 1970.
Since et Garrabos: *Problèmes de Sciences Physiques*. Vuibert. Paris, 1969.
Wallace, W.: *Fundamentals of College Physics*. The McMillan Co. Nueva York, 1961.
White-Manning-Weber: *Basic Physics*. McGraw-Hill. Nueva York, 1968.
Williams, D.; Shortley, G.: *Elements of Physics*. Prentice-Hall. Nueva York, 1965.
*→ Serway R.A.
→ Valero M.
**→ Mackelvey
→ Alvarenga-Máximo

Indice

Acción del campo magnético sobre un circuito plano, 108
Acción del campo sobre una corriente eléctrica, 107
Acciones mutuas entre corrientes paralelas, 117
Amperímetro, 158
Amperio, 72
Asociación de capacitores, 56
Asociación de resistencias, 73
Atomo de Bohr, 280
Aumento, 226

Campo eléctrico, 18
Campo en el interior de un solenoide, 116
Campo magnético, 169
Campo magnético creado por una carga eléctrica móvil, 112
Campos magnéticos producidos por las corrientes, 114
Capacidad inductiva, 9
Capacitancia, 53
de una esfera conductora, 54
Capacitor, cilíndrico, 55
esférico, 54
plano, 53
Capacitores, 53
Conductividad, 72
Corriente eléctrica, 72, 169
Corrientes alternas, 114
Corrientes de Focault, 128
Corrientes variables, 144
Culombio, 9, 53
Curie, 277

Densidad de corriente, 72
Dextrógira, 250
Diferencia, de fase, 144
de potencial, 35
Difracción, 255
Dilatación del tiempo, 271
Dioptrio, esférico, 196
plano, 196
Dipolo eléctrico, 20

Electromagnetismo, 106
Electrón voltio, 272
Electroquímica, 102
Electrostática, 9
Energía del campo magnético, 184
Energía potencial eléctrica, 34
Equivalente electroquímico, 102
Espejo plano, 198
Espejos esféricos, 198

Flujo, luminoso, 188
magnético, 111
Franklin, 10
Fuerza de un campo, 172
Fuerza electromotriz, 74
Fuerza entre dos conductores rectilíneos y paralelos, 173

Galvanómetro, 158
Giro, plano de polarización, 250

Iluminación, 188
Iluminancia, 189
Imanes, 111
Inducción electromagnética, 127
Instrumentos, de medida, 158
ópticos, 227
signos convencionales, 227
Intensidad de corriente, 72
del campo eléctrico, 18
luminosa, 189
Interferencias, 254

Levógira, 250
Ley, de Biot y Savart, 114
de Brewster, 249
de Coulomb, 9
de Faraday, 102
de Joule, 74
de Kirchhoff, 75
de la reflexión, 197
de la refracción, 196
de los lentes, 226
de Ohm, 72, 145
para un circuito abierto, 75
para un circuito cerrado, 74
Lumen, 188

Masa relativista, 271
Masa y energía, 271
Momento eléctrico, 20

Naturaleza de la luz, 188

Ondas, electromagnéticas, 183
electromagnéticas planas, 183
longitudinales, 183
transversales, 183

Permitividad del medio, 9
Polarización de la luz, 188
Potencia, 74
Potencial, 34
eléctrico, 34
producido por una distribución de cargas, 35
Prisma óptico, 196
Propagación de la luz, 188
Propiedades magnéticas de la materia, 106
Puente, de hilo, 159
de Wheatstone, 159

Radiactividad, 273
Red de difracción, 255
Reflexión, 196
Refracción, 196
Relación entre potencial y campo, 35
Relatividad, 269
Resistencia, capacitiva, 144
inductiva, 144
óhmica, 144
Resonancia, 145

Serie, de Balmer, 282
de Brackett, 283
de Lyman, 282
de Paschen, 283
de Pfund, 283
Solenoides, 108

Teorema, de Gauss, 19
de la circulación, 116
Transformaciones de Lorentz, 269

Unidad, de campo, 106
de carga eléctrica, 10
de potencia, 74
de potencial, 34
de resistencia, 73
natural de carga eléctrica, 10

Valor de ε_0, 9
Valores eficaces, 145
Variación de la resistencia con la temperatura, 73
Vatio, 74
Vector de Poynting, 184
Voltímetro, 158

FISICA II. CONCEPTOS
FUNDAMENTALES Y SU APLICACION

4a. Reimpresión

Esta edición consta de 4,000 Ejemplares. Se terminó de imprimir el 9 de Junio de 1979.

Impresión: I. y Editora Galaxia, S.A.
Tel. 677-8171

Impreso en México
PRINTED IN MEXICO